UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

ASPECTOS HISTÓRICOS Y DIDÁCTICOS SOBRE EL CONCEPTO DE COMPACIDAD

LEYDIS CEDEÑO de SILVERA

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

1997

APROBADO POR

DOCTOR JAIME J GUTIÉRREZ

Director de la Tesis

PROFESOR ELMIR CARVHALO, M Sc

Miembro

PROFESOR ARSENIO CORNEJO M Sc

Miembro

FECHA 16 DE MAYO DE 1997

DEDICATORIA

A mi esposo Edgar, quien me ofreció todo su amor cariño y comprensión para la realización de este trabajo

A mis queridos hijos Edgar y Rebeca Haydeé, quienes tuvieron la paciencia y la comprensión durante la elaboración de esta tesis

A mis padres y familiares quienes nos alentaron en el desarrollo del presente trabajo

AGRADECIMIENTO

A Dios Todopoderoso por darme fuerzas para seguir siempre hacia adelante

Al Profesor Jaime J Gutiérrez, por su comprensión, paciencia y cooperación ofrecida en todo momento, para el desarrollo de esta tesis

A todos mis Profesores de los cursos de Maestría, por todos los conocimientos transmitidos

A mis compañeros(as) de estudio, especialmente a Ana Martina, quien me motivó y alentó en todo momento

Y a todas aquellas personas que de una u otra forma han cooperado en la realización de este trabajo

ÍNDICE

Página

Página

RESUMEN

Este trabajo presenta un breve estudio sobre el origen y desarrollo del concepto de Compacidad Con el objetivo de crear un marco que sirva de motivación y nos ayude a lograr un dominio efectivo del tema Además, se discuten cinco criterios de Compacidad y éstos se utilizan para demostrar la compacidad de un subconjunto de un espacio métrico Finalmente se exhibe la existencia de un conjunto compacto de un espacio topológico que no es cerrado con esto se resaltan las dificultades naturales que se confrontan al tratar de extender el concepto de Compacidad en espacios topológicos

SUMMARY

This work state a brief study about the origin and development of the Compactness concept In order to increase motivation and for us to master this theme Furthermore we discuss five Compactness criteria and use them to prove that a subset in a metric space is compact Finally we exhibit the existence of a compact subset in a Topological Space which is not closed which gives us an idea about the difficulties to extend the Compactness concept to Topological Spaces

INTRODUCCIÓN

La noción de Compacidad es un tema muy importante en el desarrollo de la Matemática particularmente en el Análisis Real y en el Análisis Funcional

Aunque el concepto de Compacidad es presentado a los estudiantes de la Licenciatura en Matemática durante los primeros años de formación somos de la opinión que el concepto puede resultar poco accesible a los estudiantes Por esta razón hemos considerado conveniente realizar este trabajo con el fin de ofrecer algunos enfoques que permitan responder con mayor facilidad a los cuestionamientos e inquietudes que puedan surgir en el proceso de transposición didáctica

Adjudicar a Maurice Fréchet la introducción del concepto de Compacidad es un hecho aceptable en la historia de la Matemática, en el primer capítulo presentamos una justificación para esta adjudicación y resaltamos los aportes hechos por matemáticos como P S Alexandrov y P S Urysohn

Con la finalidad de dar una idea más precisa sobre el origen del concepto de Compacidad el primer capítulo también contiene una discusión sobre las contribuciones de

E Heine, E Borel, H Lebesgue R L Moore S Janiszewski, W Sierpinski y Weierstrass

Proporcionamos en el segundo capítulo distintas definiciones de Compacidad y demostramos la compacidad de un subconjunto en un espacio métrico por diversos criterios Dándole la oportunidad al estudiante de que después que él domine tanto el contenido como el concepto de abstracción que corresponde al tema sea capaz de observar cual de estos criterios es más conveniente utilizar

El tercer capítulo está dedicado a la compacidad en Espacios Topológicos, evidenciando las dificultades naturales que se tienen al tratar de extender la noción de compacidad de Espacios Métricos a Espacios Topológicos Por ejemplo, se exhibe un subconjunto compacto de un Espacio Topológico que no es cerrado

Esperamos que el lector considere este trabajo como un aporte a un tema esencialmente complejo y que al mismo tiempo constituya un motivo que estimule a otros a completar y mejorar lo que se ha logrado

CAPÍTULO I

ASPECTOS HISTÓRICOS DEL CONCEPTO DE COMPACIDAD

En este capítulo nos ocuparemos de los aspectos históricos relativos al concepto de compacidad Haremos una reseña histórica de las prefiguraciones de la compacidad en la medida que aporte al objeto de nuestro interés la fundamentación de la teoría de la compacidad

El período de referencia que más se ajusta a nuestro propósito es alrededor de 1904-1928 marcado por las contribuciones de F Hausdorff (1868-1942) Maurice Fréchet (1878-1973) W Sierpinski (1882-1969) K Kuratowski (1896- 1980) P S Alexandrov (1896-1982) y P S Urysohn (1898-1924)

Es nuestro objetivo poner de manifiesto la introducción del concepto de compacidad y el progresivo establecimiento de una Teoría de la Compacidad Por razones obvias, no podemos discutir cómo esta Teoría de la Compacidad ha dotado a otras teorías de métodos fecundos para el estudio de viejos y nuevos problemas con el consecuente efecto de aceleración sobre los ritmos de desarrollo de tales teorías

ASPECTOS GENERALES

Un hecho comúnmente aceptado en la historia del análisis y la topología es que la noción de compacidad formalmente hablando, fue introducida por una nota que el matemático francés Maurice Fréchet (1878-1973) publicó en los Comptes Rendus de la Academia de Ciencias de París en 1904

La originalidad del trabajo de Fréchet en la nota de 1904 consiste en haber abstraído la compacidad que se encontraba en estado práctico en varios contextos naturales y dar por primera vez un tratamiento sistemático del concepto Este avanzado grado de elaboración conceptual estaba asociado con los requerimientos de generalización del teorema de Weierstrass sobre la existencia de extremos de una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado teorema que Fréchet extiende a espacios más generales La importancia de la nueva noción de compacidad se mide entonces indirectamente por su estrecha relación con una propiedad de tanta utilidad como la que aparece en el teorema de Weierstrass

EDUARDO HEINE (1821-1881)

Esta propiedad de los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ era conocida por E Heine quien la había utilizado en 1872 como una técnica para demostrar uno de los más célebres resultados de Weierstrass toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua en ese intervalo

El también nos da la primera demostración rigurosa del teorema del valor medio así como la del teorema que afirma Una función f(x) continua en [a,b] (para todos los valores particulares) es también uniformemente continua Para la demostración de este teorema Heine utiliza por primera vez en la historia de las matemáticas el recubrimiento de un intervalo [a,b] por un numero finito de subintervalos sobre cada uno de los cuales la función posee una cierta propiedad Es esta propiedad la que conducirá directamente a la noción de compacidad

Es Eduardo Heine quien publica el primer escrito compilado sobre los fundamentos del análisis en 1872 Los elementos de la teoría de funciones

EMILE BOREL (1871-1956)

Entre las definiciones corrientes de la noción de compacidad se encuentra aquella que aparece en el teorema de Heine-Borel la condición que cada recubrimiento contable de un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ posee un subrecubrimiento finito Esta propiedad fue enunciada en la tesis de doctorado de E Borel en 1894

Si sobre un segmento de una recta tenemos una infinidad [numerable] de intervalos parciales tales que todo punto del segmento sea interior por lo menos a uno de los intervalos se puede efectivamente determinar un numero finito de intervalos escogidos entre los primeros y que poseen la misma propiedad (todo punto del segmento es interior por lo menos a uno de ellos)

En la demostración de este teorema, Borel considera un intervalo cerrado y acotado y supone que este intervalo es recubierto por un numero enumerable de abiertos También utiliza en su demostración los numeros transfinitos de Cantor

HENRI LEBESGUE (1875-1941)

En su libro Lecciones sobre la Integración aparecido en 1904 da una generalización del teorema de Borel al caso de un recubrimiento no necesariamente enumerable
He aquí el enunciado de Lebesgue

Si se tiene una familia de intervalos Δ tales

que todo punto de un intervalo (a b) incluidos a y b, sea interior a al menos uno de los Δ,

existe una familia formada por un número finito

de los intervalos Δ y que goza de la misma

propiedad (todo punto de (a b) es interior a uno

de ellos)

Lebesgue deduce enseguida de este teorema una bonita demostración de la continuidad uniforme es decir el teorema de Heine

En 1904 H Lebesgue observó que la propiedad se mantenía para todo recubrimiento abierto de un intervalo cerrado y acotado ésta generalización aparece formulada en la primera edición de sus célebres Lecons sur l'Intégration

Recordemos que el TEOREMA DE BOREL fue motivado por las necesidades de resolver un problema de medida de intervalos que se le planteaba a Borel en su estudio de las propiedades generales de ciertas funciones analíticas simples

Por su parte, Lebesgue se ve conducido a emplear la propiedad de los recubrimientos igualmente en el caso de algunas proposiciones sobre la medida de intervalos aplicando el principio de las cortaduras de Dedekind

Además en sus trabajos las familias de intervalos tenían la potencia del continuo razón de más que contribuyó a la generalización del teorema de Borel

Finalmente Lebesgue como Heine tuvo en cuenta que empleando su generalización también se derivaba la continuidad uniforme del hecho de la continuidad de la función sobre el intervalo cerrado y acotado La extensión realizada por Borel del resultado de Lebesgue a todo conjunto acotado y cerrado de un espacio euclidiano cualquiera sería el toque final que le daría forma a lo que hoy se conoce como el TEOREMA DE HEINE-BOREL-LEBESGUE

MAURICE FRÉCHET (1878-1973)

La denominación de CONJUNTO COMPACTO aparece por primera vez en una nota de Fréchet publicada en 1904 en los COMPTES RENDUS Pero el concepto tiene aquí una connotación particular y no se relaciona, como hoy en día con la propiedad de recubrimientos de Borel-Lebesgue El interés de Fréchet al introducir esta definición, era facilitar la generalización del teorema Weierstrass sobre la existencia del extremo de una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado a un espacio L con la topología de la convergencia de sucesiones En esta nota Fréchet presenta dos definiciones de la compacidad

i "Llamaremos CONJUNTO COMPACTO a todo conjunto E (de una clase L)[1] tal que siempre exista al menos un elemento común a una sucesión infinita cualquiera de conjuntos E_1 E_2 E_n contenidos en E cuando estos conjuntos -que poseen al menos un elemento cada uno- son cerrados y cada cual está contenido en el precedente " [4 p 68]

Esta es la definición de compacidad por medio de la Condición de Cantor Actualmente decimos que un espacio Hausdorff-Compacto verifica esta condición si toda familia decreciente de conjuntos cerrados no vacíos tiene una intersección no vacía Esta definición se ha transmitido y ha llegado a tener notoriedad actual por la atención que le dieron Alexandrov y Urysohn en sus investigaciones sobre la teoría de la compacidad en la que aparecía referida a espacios métricos

La segunda definición de compacidad que se encuentra en la nota de Fréchet de 1904 es formulada así

ii "La condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea compacto es que todo conjunto E_1 formado de una infinidad de elementos distintos contenidos en E dé lugar al menos a un elemento límite " [4 p 68]

Es la definición de compacidad mediante el teorema de Bolzano-Weierstrass Aunque Fréchet no lo reconozca

---

[1] Es una clase de elementos de naturaleza arbitraria sobre la cual está definida una convergencia generalizada de sucesiones de tales elementos

explícitamente sino años después todo da a entender que él presupone que estas definiciones son equivalentes en $\mathbb{R}^n$ Desde sus primeros trabajos Fréchet reconoce que la compacidad es una propiedad topológica que identifica a los conjuntos acotados independientemente de la naturaleza del espacio

En su obra sobre los espacios abstractos encontramos la siguiente afirmación

> "Cuando pasamos de los espacios euclidianos a espacios más generales nos percatamos inmediatamente de la necesidad de generalizar la noción de conjunto acotado " [4, p 190]

Pero no solamente se trataba de generalizar la noción de conjunto acotado, sino de hacerlo de manera que se preservasen e hiciesen evidentes aquellas propiedades que dan efectivamente utilidad a estos conjuntos en el Análisis Se consideran las siguientes situaciones

1 En los espacios métricos, la cuestión se "resuelve", puesto que basta generalizar la propiedad de los conjuntos acotados de $\mathbb{R}$ de estar contenidos en un intervalo cerrado Por ejemplo, decimos que un conjunto de funciones continuas es acotado si los valores absolutos de las funciones se mantienen menores que un número fijo

2 Pero al pasar a espacios que no son metrizables se

descubre que no hay una forma inmediata de extender la noción de compacidad Esta es la idea que llevó a Fréchet a las definiciones de la compacidad en 1904 [4 p 67]

"La definición topológica de compacidad (y por consiguiente, la más general) es aquella que abstrae la propiedad intrínseca (del resto) Esto es, para generalizar la teoría de los conjuntos "lineales" acotados en $\mathbb{R}$ es necesario escoger entre las propiedades de los conjuntos acotados una que los caracterice que pueda colocarse en una forma independiente de la naturaleza de los elementos de tales conjuntos y que sea la que intervenga en las demostraciones existentes En virtud de esta definición los conjuntos compactos desempeñan el mismo papel, con respecto al espacio abstracto al que pertenecen que los conjuntos acotados del espacio lineal" [4, p 190] Por ejemplo la definición (i) de la compacidad es una definición implícita o topológica Pero la (ii) deviene explícita en los espacios métricos En efecto la propiedad que permite caracterizar un conjunto E de un espacio métrico como compacto-- a saber, que para todo subconjunto infinito suyo exista un punto de acumulación-- no es una propiedad intrínseca "los puntos de acumulación pueden o no pertenecer al conjunto E (Observemos de acuerdo a Fréchet, que si a es punto de acumulación de un conjunto E a es punto límite de por lo menos una sucesión de puntos distintos extraída del conjunto) [4, p 36]

Esta situación planteaba la necesidad de una definición de la compacidad como una propiedad del Conjunto en sí en el sentido que no utilizará otras relaciones que aquellas que se establecen entre sus propios puntos De ahí que Fréchet se vea conducido a introducir en su tesis la definición de CONJUNTO EXTREMAL "Un conjunto de un espacio L que es compacto y cerrado al mismo tiempo Más tarde se adoptaría la denominación de conjunto Compacto en sí" [3 p 7] Fréchet demostró, particularmente "que a diferencia de las nociones de cerrado y de compacto la de compacto en sí es un invariante topológico" [4, p 65]

Diferentes matemáticos con investigaciones activas en la compacidad se preocuparon a fondo por distinguir los matices de las definiciones y precisar los rasgos distintivos de una noción frente al resto (en distintos espacios relativos) y especializar las notaciones y terminologías que expresaran adecuadamente tales diferencias Esta preocupación está presente en varios lugares de las correspondencias topológicas de Fréchet Por ejemplo en la carta que envía Alexandrov y Urysohn a Fréchet el 22-XI-1923 la cual hace mención al problema que venimos comentando

El rol fundamental que juegan los conjuntos cerrados y (acotados) en análisis no es porque sean cerrados sino porque son compactos en sí (extremales) En efecto esta ultima noción que se le debe a usted es de una importancia extrema en todas las partes de las matemáticas en particular ella es topológicamente invariante mientras que la propiedad de ser cerrado no lo es (como usted acaba de indicarlo) Nos parece entonces que si se considera a un conjunto como un ENTE TOPOLOGICO, la propiedad de ser cerrado no será una propiedad del conjunto mismo ella caracterizará más bien su situación en el espacio

Dos años después en la carta del 5-VI-1925 Alexandrov manifiesta claramente a Fréchet por qué le parece injustificada la resistencia de Fréchet a tomar como noción de base para sus trabajos la noción de compacidad en sí

Usted prefiere utilizar siempre los conjuntos compactos (situados en espacios diversos) mientras que Urysohn y yo siempre hemos estudiado los espacios compactos en sí mismos Nuestras razones son las siguientes

> En primer lugar la propiedad de la compacidad de un conjunto no es una propiedad intrínseca del conjunto sino que es una propiedad que caracteriza solamente la forma en que se situa el conjunto en el espacio dado Por esta razón la recta infinita que por ejemplo no es compacta (en el plano, o si se quiere en sí misma es no obstante homeomorfa a un intervalo abierto cualquiera situado sobre una recta y que naturalmente es compacto realmente si $\mathbb{R}$ es homeomorfa a (-1 1) por ejemplo, $\mathbb{R}$ lo es a [-1 1] y $\mathbb{R}$ es la compactificación de $\mathbb{R}$
>
> Por otra parte se conocen muy pocas propiedades interesantes sobre los conjuntos acotados más generales situados por ejemplo en el plano euclidiano aunque estos sean compactos
>
> Cuando se desea considerar propiedades topológicas más precisas hay que limitarse al estudio de conjuntos compactos en sí es decir conjuntos acotados y cerrados

En cartas posteriores, Alexandrov indicará muy frecuentemente a Fréchet que la importancia de nociones como la de compacto en sí, se debía a que ellas son propiedades topológicamente invariantes y que pertenecen a una teoría que se encontraba subyacente a las diferentes publicaciones del francés

Estas preocupaciones de orden axiomático también aparecen consignadas en algunos trabajos de Urysohn En la memoria de 1925 en donde elabora de forma acabada su teoría de la dimensión Urysohn se declara partidario de la definición intrínseca (por ejemplo compacto en sí) frente a la definición extrínseca (conjunto cerrado y acotado) Su preferencia se sustenta en dos consideraciones "(a) una es de orden "estético" entre dos definiciones equivalentes (y ambas lo son en espacios euclidianos e incluso en espacios métricos), debe escogerse siempre aquella "que revele inmediatamente las principales propiedades de la noción a definir" (b) la consideración es matemática estas dos nociones no son equivalentes en espacios más generales" [18 p 35 y 55]

De acuerdo a Bourbaki (1974) el principal aporte de Fréchet a la moderna teoría de la compacidad fue

> Sea E un conjunto de elementos de una clase normal V Para que toda familia H, numerable o no de conjuntos I tales que todo elemento de E sea interior en sentido estricto al menos a uno de ellos se puede extraer un numero finito de conjuntos formando una familia G que goza de la

misma propiedad que H es necesario y suficiente que sea extremal

De lo anterior se puede deducir que Fréchet introdujo la noción de compacto en los espacios de clase L pero se limitó a aportar elementos para la teoría de la compacidad en espacios equivalentes a los métricos Es en 1917 cuando Fréchet se plantea la cuestión en sentido más general al formular el siguiente problema estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que el teorema de Heine-Borel-Lebesgue se pueda verificar en espacios de clase L

R L MOORE (1881-1974)

Moore, fue el primero en abordar este problema al publicar una nueva definición de la compacidad en los espacios L más limitada y precisa que la definición original de Fréchet

Moore introduce la noción de familia monótona de conjunto de puntos de la clase L en el sentido que para cada dos conjuntos de la familia uno está contenido en el otro Entonces define una propiedad K

Una parte M del espacio L tendrá la propiedad K si para toda familia monótona G de partes cerradas de M existe un punto comun a todos los miembros de la familia G

Luego, a las familias monótonas de intersección vacía las denomina con el nombre de propias Concluye dando la definición de compacto

Diré que una parte M es compacta en el nuevo sentido si para toda familia monótona propia F de subconjuntos de M existe al menos un punto que es punto límite de todo conjunto de puntos de F

Al finalizar Moore establece el siguiente teorema

Sea M una parte de un espacio de clase S M posee la propiedad de Borel-Lebesgue si y sólo si M es compacto en el nuevo sentido y M es cerrado

Lo más importante de los resultados de Moore es la generalización del teorema de H-B-L y el esfuerzo por producir una definición de compacidad más elaborada que la de Fréchet

S JANISZEWSKI

También Moore habló en su artículo de la importancia histórica de las contribuciones del polaco Janiszewski a la teoría de la compacidad

Moore comenta que después de terminar el manuscrito del presente artículo en 1912 se enteró que Janiszewski introdujo una concepción general de límite Además definió un conjunto de puntos como perfectamente compacto si toda sucesión de sus elementos se puede extraer una sucesión del mismo tipo de orden poseyendo un elemento único

Moore indicó que existían similitudes entre algunos puntos de su trabajo y la definición de Janiszewski (en la clase S de espacios la compacidad en el sentido de Moore equivale a la perfecta compacidad) El señala que Janszewski no utilizó su concepción de compacidad para estudiar el teorema de Heine-Borel-Lebesgue

Naturalmente una de las primeras generalizaciones de la definición de Fréchet de la compacidad es la que apareció en la tesis de Janiszewski en 1910

K KURATOWSKI y W SIERPINSKI (1896-1980 y 1882-1969)

Kuratowski y Sierpinski a fines de 1921 le escriben una carta a Fréchet la cual contiene una discusión sobre puntos de desacuerdo alrededor del texto del artículo en el cual se publicaban resultados obtenidos con respecto al estudio de la generalización del teorema de H-B-L en el seminario de Matemáticas de la Universidad de Varsovia Lo más importante de esta publicación es el siguiente teorema

Para que el teorema de Borel-Lebesgue se aplique a una clase L es suficiente y necesario que todo conjunto infinito E de elementos de esta clase que es compacto y cuyo derivado también es compacto dé lugar al menos a un elemento p de potencia igual a la de E relativamente a E

En otras palabras que toda vecindad de p contenga un subconjunto de E equipotente a E

A pesar de que los autores que publicaron esta carta no mencionan el nombre de Janiszewski el estudio del procedimiento que ellos siguieron pone de manifiesto que su resultado se había inspirado en la tesis de Janiszweski

Posteriormente Fréchet redefine un conjunto perfectamente compacto mediante la idea del teorema de Sierpinski-Kuratowski

Sea E un conjunto de un espacio accesible [espacio T_1] E es perfectamente compacto si para todo subconjunto infinito e de E existe un punto p de E que es punto de acumulación maximal

Fréchet también demuestra que todo conjunto perfectamente compacto es compacto en un espacio cualquiera y las dos nociones son equivalentes en los espacios métricos

Esta es pues la situación de los trabajos sobre los fundamentos de espacios compactos hacia el año 1922 cuando Alexandrov y Urysohn se interesa por ellos Enseguida se dan cuenta de la necesidad que hay de responder a la dispersión de teorías y definiciones de compactos con una unificación de lenguaje y una sistematización de resultados en el espacio topológico que más se prestara a los requerimientos de la teoría

P S ALEXANDROV y P S URYSOHN (1896-1982 y 1898-1924)

Alexandrov y Urysohn produjeron el concepto de bicompacto motivados por la idea de conjuntos perfectamente compactos El 28 de enero de 1924 le escriben una carta a Fréchet en donde le notifican que ellos habían introducido desde años anteriores la noción de bicompacto para reemplazar la perfecta compacidad y hacerla más conforme a la definición de la compacidad ordinaria

La definición de bicompacto como aparece en esta carta es

> Un conjunto A perfectamente compacto del espacio H [espacio accesible de Fréchet o espacio T_1] se llama bicompacto (en sí), si cada uno de sus subconjuntos infinitos da lugar al menos a un

elemento de acumulación completa de A

Un punto es de acumulación completa (punto de acumulación maximal según Fréchet) de una parte de A de un espacio H si la potencia del conjunto $A \cap V_\epsilon$ es igual a la de A para toda vecindad V_ϵ de ϵ

Una parte del espacio topológico de Hausdorff (o topológico a secas para diferenciarlo del accesible de Fréchet) es compacta si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes

i) Todo recubrimiento numerable suyo por dominios (conjuntos abiertos) tiene un recubrimiento finito

ii) Toda parte numerable suya admite un punto de acumulación completa (de acuerdo a la formulación de Fréchet ya referida de que todo perfectamente compacto es compacto)

Por ende si se sustituye en ambas manifestaciones la palabra numerable por la expresión de potencia menor o igual a la de los números reales , obtenemos la definición moderna de compacto

> Un conjunto infinito de un espacio topológico es bicompacto si admite un punto de acumulación completa o lo que es lo mismo, si satisface la propiedad de Borel-Lebesgue

Las motivaciones que condujeron a Alexandrov y a

Urysohn a descubrir la definición de bicompacto fue por la lectura de dos observaciones que se encontraban en el libro de Hausdorff publicado en 1914 Estas son

i) La compacidad en el sentido de Fréchet equivale al teorema de Borel-Lebesgue en los espacios métricos

ii) La condición de Borel-Lebesgue es equivalente a la condición de Cantor en los espacios topológicos

Luego hacia 1922 los dos soviéticos se convencen de que la nueva noción de bicompacto sirve de elemento unificador de tres propiedades topológicas que casi siempre eran utilizadas en campos teóricos(espacios abstractos) diferentes Bolzano-Weierstrass Borel-Lebesgue y Cantor

Esta teoría sistemática de los espacios bicompactos fue publicada en la Memoria de Alexandrov & Urysohn (1929) Pero por las cartas de Alexandrov sabemos que estos resultados fueron redactados en 1922 Además desde 1924 habían aparecido dos artículos firmados uno por Alexandrov otro conjuntamente en donde están contenidas todas las ideas fundamentales de ésta Memoria

Otra de las contribuciones de estos dos amigos fue la definición y estudio de la importancia de los espacios localmente compactos para la topología Redactado a principio de 1924 por Urysohn pero firmado conjuntamente se advierten algunas ideas que orientaron la formación de este nuevo concepto

En una carta posterior (del 18 de febrero de 1926) se encontró la definición moderna de regularidad en donde se observa claramente la idea de localización topológica que entonces manejaba Alexandrov

> Un espacio accesible E se llama regular si cuando se consideran las vecindades cerradas V de cualquier punto suyo x en lugar de las vecindades abiertas se obtiene un sistema de vecindades que definen este espacio

Esto es E es regular si E es accesible (o simplemente de Hausdorff) y todo punto suyo admite una base de vecindades cerradas

Ellos consideran que la compacidad es una propiedad integral sin embargo a veces se obtienen resultados interesantes al localizar una propiedad integral La definición de compacidad local que ellos han venido utilizando es la siguiente

> Una clase H (espacio T_1 de Fréchet) se llama localmente compacta (respectivamente bicompacta) en un punto ϵ si existe una vecindad V_ϵ tal que $V_\epsilon \cap V_\epsilon$ sea (bi) compacta en sí

Una nota adicionada entre paréntesis, revela que se trata de una vecindad (bi) compacta del punto en el sentido actual de la definición

> Un espacio E de Hausdorff es localmente compacto si para todo punto de E existe una vecindad compacta

Inmediatamente se precisa que dos espacios localmente (bi) compactos conservan muchas de las propiedades de los espacios (bi) compactos un espacio localmente (bi)compacto no necesariamente es (bi) compacto Por ejemplo los espacios euclidianos de dimensión n Entonces se presenta el problema de compactificar aquellos espacios que no lo son integralmente pero que se comportan localmente como compactos El procedimiento a seguir para tal efecto es lo que hoy se conoce como el principio de la compactificación de Alexandrov o compactificación por un punto al infinito

> Todo espacio accesible regular localmente (bi) compacto pero no (bi) compacto puede convertirse (de manera única) en (bi) compacto por la adjunción de un solo punto

En el manuscrito de 1924 se mencionan las compactificaciones de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ como para ilustrar el principio anterior

> La adjunción de un punto convierte la recta en una circunferencia y el plano en la superficie de una esfera

Para finalizar la siguiente propiedad de los espacios localmente compactos sobre la cual Alexandrov volverá en distintas ocasiones en los años subsiguientes es para que un espacio localmente compacto sea metrizable se requiere que el espacio sea separable

En los renglones anteriores hemos expuesto algunos elementos que consideramos pueden contribuir al mejor entendimiento histórico del concepto de compacidad y por extensión a clarificar un período importante en la evolución moderna del análisis y de la topología

Como hemos visto la aparición de la noción de compacidad y otras nociones relacionadas fueron surgiendo cada una reivindicando su propia eficacia y razón de ser

Consideramos que todas esas variaciones terminológicas del concepto de compacidad y sus diferentes aplicaciones a otros contextos además de expresar una esencia común han enriquecido y precisado al mismo tiempo su propia significación

Observándose que entre todas las formulaciones de la idea matemática hay una que se impone(en el sentido de establecer cierto orden) por su elegancia y por la economía de pensamiento En el caso de la teoría de la compacidad fue la formulación de Alexandrov y Urysohn la que jugó el papel protagónico frente a las demás

Las conclusiones anteriores habrían podido destacarse aun más nítidamente de lo que aparecen en la actual redacción si hubiésemos extendido unas décadas más el periodo de la historia de la compacidad que analizamos Efectivamente al prolongar por algunos años más el período de fundamentación que hemos situado aproximadamente entre 1904 y 1928 habríamos encontrado acontecimientos cruciales para el desarrollo actualmente alcanzado por la teoría de la compacidad y sus aplicaciones Por ejemplo el análisis de los trabajos del Seminario Topológico de Alexandrov en Moscu en la década de 1930 seguramente habría contribuido a realzar el poderío y la riqueza de los instrumentos teóricos elaborados en el primer período

Por otra parte se tendrá que reconstruir la génesis y los primeros pasos de uno de los resultados más bellos y fecundos de la topología el célebre Teorema del Producto de Tychonov en virtud del cual todo espacio producto de una familia de espacios compactos es compacto

Además la continuación de esta línea de investigación arrojará nuevas informaciones y otros datos que sumados a los que presentamos en este trabajo, contribuyan al análisis histórico parcial que hemos hecho y favorezcan la comprensión global de las etapas iniciales de la Teoría de la Compacidad

CAPÍTULO II

COMPACIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS

Bajo el supuesto que los lectores de este trabajo tienen conocimientos de los elementos básicos de la topología en la recta real introduciremos la definición de los conceptos fundamentales en espacios métricos que luego utilizaremos para tratar la Teoría de Compacidad en espacios métricos además el lector tendrá la oportunidad de comparar los resultados y definiciones aquí discutidas con lo tratado en el capítulo anterior

ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 2 1

Sea E un conjunto no vacío Una métrica sobre E es una función

$$d \quad E \times E \to \mathbb{R}$$

que posee las siguientes propiedades

i) Para todo x $y \in E$ $d(x\ y) \geq 0$

ii) Para todo x $y \in E$ $d(x\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) Para todo x $y \in E$ $d(x\ y) = d(y\ x)$

iv) Para todo x y $z \in E$ $d(x\ y) \leq d(x\ z) + d(y\ z)$

La propiedad (iv) es la llamada Desigualdad Triangular

A los elementos del conjunto E lo llamaremos puntos y al par (E d) un espacio métrico

Observaciones 2 1

1) Sobre un mismo conjunto E pueden en general definirse métricas distintas las cuales dan origen a espacios métricos diferentes

2) Las cuatro propiedades que posee una métrica constituye un sistema de axiomas consistentes aunque éstos no son independientes [10 p 16]

Un modelo intuitivo natural de espacio métrico es el plano geométrico en el cual interpretamos con facilidad las propiedades de distancia Por ejemplo la primera nos dice que la distancia entre dos puntos es siempre un número real positivo o cero la segunda establece que la distancia es cero si y sólo si los puntos coinciden La propiedad simétrica nos dice que la distancia de x a y es igual a la distancia de y a x Por último la cuarta propiedad indica que un lado de un triángulo nunca tiene longitud mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados por eso se le denomina desigualdad triangular

Ahora veremos una variedad de ejemplos de espacios métricos particulares Muchos de éstos tienen importancia considerable por sí mismos y todos juntos ponen de manifiesto la gran generalidad del concepto

Ejemplo 2 1 Sea E un conjunto cualquiera no vacío Definamos la función d $E \times E \to \mathbb{R}$ por $\forall x \; y \in E$

$d(x\ y) = 1$ si $x \neq y$ $d(x\ y) = 0$ si $x = y$

Al espacio (E d) se le denomina espacio métrico discreto

Ejemplo 2 2 Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ de los numeros reales y la función $d(x\ y) = | x-y |$ $\forall\ x\ y \in \mathbb{R}$

Consecuencias del ejemplo 2 2

1) Esta métrica le da a $\mathbb{R}$ estructura de espacio métrico el cual se llama usualmente la recta real

2) Son muchas y muy diversas las métricas que pueden definirse en $\mathbb{R}$ Pero cuando consideremos a $\mathbb{R}$ como un espacio métrico se entenderá que la distancia es la definida en este ejemplo

ESPACIOS NORMADOS

Definición 2 2

Una norma en V es una función de V en $\mathbb{R}$ que posee las propiedades siguientes

i) Para todo $x \in V$ $\| x \| \geq 0$

ii) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ donde θ es el vector nulo en V o elemento neutro respecto a la suma en V

iii) Para todo $x \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|$$

iv) Para todo $x\ y \in V$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (desigualdad triangular de la norma)

Ejemplo 2 3 Sea V un espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los numeros reales Podemos demostrar que todo espacio normado es metrizable, es decir puede definírsele una métrica inducida por la norma y así considerársele un espacio métrico

Definamos la función d $V \times V \to \mathbb{R}$ tal que

$\forall x\ y \in V \quad d(x\ y) = \| x - y \|$ d es una métrica sobre V

Observaciones 2 2

1) Utilizaremos la notación $\| x \|$ para indicar la imagen del vector x y la llamaremos norma de x

2) Intuitivamente podemos interpretar la norma como la longitud de vectores particularmente si pensamos en los vectores del plano o del espacio

3) Al par $(V, \| \ \|)$ esto es a un espacio vectorial provisto de la norma se le denomina espacio normado

4) Además un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ puede en general proveerse de diversas normas dando origen a distintos espacios normados

A partir de este momento y cuando sea necesario trataremos a los espacios normados como métricos entendiendo siempre la distancia como inducida por la norma

5) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ $X \neq \phi$ y $B(X\ \mathbb{R}) = \{ f\ X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada} \}$

Para cada $f \in B(X\ \mathbb{R})$ definimos $\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |$

Se tiene que $\| \ \|$ es una norma sobre el $\mathbb{R}$-espacio $B(X\ \mathbb{R})$

Si X es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y

$C(X\ \mathbb{R}) = \{ f\ X \to \mathbb{R} \ / \ f$ es continua $\}$, por el Teorema de Weierstrass $C(X\ \mathbb{R}) \subseteq B(X\ \mathbb{R})$ y por lo tanto $C(X\ \mathbb{R})$ es un espacio normado

ESPACIO CON PRODUCTO INTERIOR

Definición 2 3

Un producto interior en V es una función definida en VxV sobre $\mathbb{R}$ con las propiedades siguientes

i) $x \in V \ \ x \neq 0 \Rightarrow x \circ x > 0$ (positivo definido)

ii) Para todo $x\ y \in V \ \ x \circ y = y \circ x$ (simetría)

iii) Para todo $x\ y, z \in V$ para todo

$\alpha\ \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha x + \beta y) \circ z = \alpha (x \circ z) + \beta (y \circ z)$

Utilizaremos la notación $x \circ y$ para indicar la imagen del par $(x,y) \in VxV$

Al par $(V \circ)$, esto es a un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ junto con un producto interior en V, se le denomina espacio euclídeo

Consecuencias de la definición de producto interior

1) Para todo $x \in V \quad \theta \circ x = (0\ \theta) \circ x = 0 (\theta \circ x) = 0$

En particular $\theta \circ \theta = 0$

Esto nos permite ampliar i

2) Para todo $x \in V$ $x \circ x \geq 0$ $x \circ x = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

La simetría y la linealidad por la izquierda nos proporcionan la linealidad por la derecha

$\forall x\ y\ z \in V \quad \forall \alpha\ \beta \in \mathbb{R}$

$x \circ (\alpha y + \beta z) = (\alpha y + \beta z) \circ x = \alpha (y \circ x) +$

$\beta (z \circ x) = \alpha (x \circ y) + \beta (x \circ z)$

3) Una propiedad menos evidente pero importante es la desigualdad de Schwarz

$$\forall x,y \in V \quad | x \circ y | \leq \sqrt{x \circ x} \quad \sqrt{y \circ y}$$

Ejemplo 2 4 Sea V un espacio vectorial en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales Todo espacio euclídeo (V $\circ$) puede considerarse como normado definiendo la norma $\| \ \|$ por Para todo $x \in V$ $\| x \| = \sqrt{x \circ x}$ lo cual tiene sentido sabiendo que $x \circ x \geq 0$ Se puede verificar que se trata de una norma

Siempre que se considere un espacio euclídeo como un espacio normado se entenderá la norma (1)

La métrica natural de un espacio euclídeo es

Para todo $x\ y \in V$ $d(x\ y) = \sqrt{(x - y) \circ (x - y)}$

Ejemplo 2 5 Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ de todas las n-adas ordenadas de numeros reales Este es un espacio vectorial respecto a la suma y multiplicación por escalar usuales

Observaciones 2 3

1) $\mathbb{R}^n$ es además un espacio euclídeo con respecto al producto interior

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \bullet (b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$

2) Se pueden definir diferentes métricas en $\mathbb{R}^n$ como por ejemplo

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_2(x, y) = \sup_{1 \le i \le n} | x_i - y_i |$$

$$d_3(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

ESFERA ABIERTA

Definición 2 4

Sea (E d) un espacio métrico cualquiera Tomemos un punto $a \in E$ y un número real $r>0$ Se denomina esfera abierta de centro a y radio r al conjunto

$$N(a,r) = \{ x \in E \;/\; d(x,a) < r \}$$

Se denomina esfera abierta reducida de centro a y radio r es el conjunto

$N^{1}(a\ r) = \{ x \in E \ / \ 0 < d(x\ a) < r \}$ que es lo mismo que $N(a,r) - \{ a \}$

Una esfera cerrada de centro a y radio r es el conjunto ***N[a r]***= $\{ x \in E \ / \ d(x\ a) \leq r \}$

Y superficie esférica de centro a y radio r es el conjunto $S(a\ r) = \{ x \in E \ / \ d(a\ x) = r \}$

Observación 2 4. Una esfera abierta no puede ser un conjunto vacío ya que al menos el centro pertenece a él Una esfera abierta reducida o una superficie esférica puede por otra parte resultar un conjunto vacío

PUNTO INTERIOR

Definición 2 5

Sea (E d) un espacio métrico cualquiera y A un subconjunto de E Se dice que $x \in A$ es un punto interior de A si existe un número real $r>0$ tal que $N(x\ r) \subset A$

Al conjunto $A^{0} = \{ x \in A \ / \ x \text{ es interior de } A \}$ se le denomina interior del conjunto A

Observaciones 2 5

1) $A^{0} \subset A$

2) A^{0} puede ser vacío sin que lo sea A

CONJUNTO ABIERTO

Definición 2 6

Sea (E d) un espacio métrico cualquiera y A un subconjunto de E Decimos que el conjunto A es abierto si $A = A^0$, es decir si todo punto de A es interior

Ejemplo 2 6 El conjunto E y el conjunto vacío son abiertos

Proposición 2 1 La unión de una familia cualquiera de conjuntos abiertos es un conjunto abierto

Demostración Sea Λ la familia de conjuntos abiertos y

$S = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ Demostraremos que S es abierto

Si $x \in S$ entonces $x \in A$ para algún $A \in \Lambda$ pero A es abierto luego existe un número real $r > 0$ tal que $N(x,r) \subset A$

Por otro lado $A \subset S$ lo que implica $N(x\ r) \subset S$ o sea que x es interior a S y S es por lo tanto abierto

Proposición 2 2 Toda esfera abierta es un conjunto abierto

Demostración Sea la esfera abierta $N(a\ r)$ y $x \in N(a\ r)$ un punto cualquiera de ella Debemos demostrar que x es interior a la esfera

Consideremos el numero real $r_1 = r - d(a\ x) > 0$ y la esfera

abierta $N(x\ r_1)$ Demostraremos que $N(x\ r_1) \subset N(a\ r)$
Para todo $y \in N(x,r_1)$ $d(x\ y) < r_1$, es decir
$d(x\ y) < r - d(a\ x)$ esto es $d(x\ y) + d(a\ x) < r$ luego
$d(a\ y) < r$ lo que implica $y \in N(a\ r)$

Las siguientes proposiciones son fáciles de probar por eso omitimos sus demostraciones

Proposición 2 3 Para todo conjunto A en (E,d) A es un conjunto abierto es decir A = A

Proposición 2 4 La intersección de un numero finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto

Proposición 2 5 Si A y B son conjuntos cualesquiera en un espacio métrico entonces

$$A \cup B \subset (A \cup B) \qquad A \cap B = (A \cap B)$$

ENTORNO DE UN PUNTO

Definición 2 7

Sea (E d) un espacio métrico cualquiera y $a \in E$ Se llama entorno del punto a a todo conjunto abierto que lo contenga En particular, una esfera abierta de centro a y cualquier radio r es un entorno de a Observemos por otra parte, que todo entorno de a contiene una esfera abierta de centro a ya que a pertenece al entorno y es por tanto punto interior de éste

PUNTO DE ACUMULACIÓN

Definición 2 8

Sea (E d) un espacio métrico A es un conjunto en (E d) y x ∈ E Se dice que x es un punto de acumulación del conjunto Si todo entorno de x contiene puntos de A distinto de x Esto es para todo entorno de x se cumple

$(S - \{ x \}) \cap A \neq \phi$

Observaciones 2 6 Sea A un subconjunto de un espacio métrico

1) Puede suceder el conjunto A no admita puntos de acumulación o que el conjunto de los puntos de acumulación de A sea finito o infinito

2) No es necesario, en la definición que x sea elemento de A

3) Si x pertenece a A pero no es punto de acumulación de A recibe el nombre de punto aislado de A Es decir que existe algún entorno de x que no contiene puntos de A

Ejemplo 2 7 En la recta real el conjunto { 1 1/2 1/3 } posee un unico punto de acumulación que es el cero el cual no pertenece al conjunto Todos los elementos del conjunto son aislados

Ejemplo 2 8 En la recta real todos los elementos de $\mathbb{R}$ son puntos de acumulación del conjunto de los números racionales

Proposición 2 6 Si A es un conjunto en el espacio métrico (E d) y x ∈ E es tal que para todo numero real r > 0

$$A \cap N^{1} (x\ r) \neq \phi$$

entonces x es un punto de acumulación de A

Demostración Sea S un entorno cualquiera de x Como x ∈ S y S es abierto existe un r > o tal que N(x r) ⊂ S lo que implica $N^{1} (x,r) \subset S - \{ x \}$ de donde

$$\phi \neq A \cap N^{1} (x\ r) \subset (S - \{ x \}) \cap A$$

El recíproco de este resultado es por supuesto cierto ya que una esfera abierta de centro x es un entorno de x

CONJUNTO DERIVADO

Definición 2 9.

Se denomina conjunto derivado de A al conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto A y se representa por A

Proposición 2 7 Sea x un punto de acumulación de un conjunto A Si S es un entorno cualquiera de x el conjunto

$$(S - \{ x \}) \cap A \text{ es infinito}$$

Demostración Lo probaremos por reducción al absurdo Supongamos lo contrario esto es

$$(S - \{ x \}) \cap A = \{ x_1\ \ x_2\ \ \ \ \ \ x_n \}$$

Para algún entorno S de x consideremos $r_k = d(x\ x_k) > 0$ (k = 1, 2 n)

Por otro lado como S es abierto y contiene a x existe un $r_0 > 0$ tal que $N(x\ r_0) \subset S$

Sea $r = \text{mín} \{ r_0\ r_1\ \ r_n \}$

Entonces $N^1 (x\ r) \cap A = \phi$ ya que $N^1 (x\ r) \subset S - \{ x \}$ y no contiene ninguno de los x_k Pero esto contradice la hipótesis de que x es un punto de acumulación de A

Observaciones 2 7

1) De este teorema se deduce que para que un conjunto de un espacio métrico tenga la posibilidad de admitir puntos de acumulación debe ser infinito

2) Un conjunto finito no admite puntos de acumulación

3) Si un conjunto es infinito no puede asegurarse que admita puntos de acumulación

Ejemplo 2 9 El conjunto $\mathbf{N}$ de los numeros naturales es infinito y no tiene puntos de acumulación

4) Si $A \subset B$ es evidente tomando en cuenta la definición que todo punto de acumulación de A lo es también de B esto es, $A \subset B$

CONJUNTO CERRADO

Definición 2 10

Sea (E d) un espacio métrico cualquiera y A un subconjunto de E Si A $\subset$ A es decir si A contiene todos sus puntos de acumulación decimos que A es un conjunto cerrado

Como hemos visto en el capítulo anterior los conceptos de punto de acumulación y de compacidad están estrechamente relacionados Pero es importante señalar que la proposición 2 7 es válida sólo para espacios métricos y ciertas categorías de espacios topológicos [5]

Observaciones 2 8

1) Si A no admite puntos de acumulación es decir A = ϕ A es cerrado, ya que siempre A $\subset$ A

2) El conjunto vacío y cualquier conjunto constituido por un número finito de puntos son conjuntos cerrados Trivialmente, el conjunto E también es cerrado

3) Los conjuntos ϕ y E son conjuntos abiertos y cerrados a la vez

CONJUNTO PERFECTO

Definición 2 11

Sea (E d) un espacio métrico cualquiera y A un subconjunto de E Si $A = A$ esto es que A sea cerrado y que todos sus puntos sean de acumulación se denomina conjunto perfecto

Ejemplo 2 10 El conjunto de los numeros reales es un conjunto perfecto

PUNTO DE ADHERENCIA

Definición 2 12

Sean (E d) un espacio métrico y A un conjunto sobre el espacio métrico (E d) Al conjunto $\bar{A} = A \cup A$ es decir la unión de A con todos sus puntos de acumulación se le denomina clausura de A y sus elementos reciben el nombre de puntos de adherencia de A

Observación 2 9 Si $A \subset A \Leftrightarrow \bar{A} = A \cup A = A$, es decir un conjunto es cerrado si coincide con su clausura En general tendremos que $A \subset \bar{A}$ y $A \subset \bar{A}$

Supongamos que $A \subset B$ y sabemos que $A \subset B$ luego obtenemos $\bar{A} \subset \bar{B}$

Proposición 2 8 Para todo conjunto A en un espacio métrico se verifica ($\bar{A}$) = A es decir $\bar{A}$ es cerrado

La siguiente proposición nos da algunas alternativas para definir el concepto de puntos de adherencia

Proposición 2 9 Sea A un conjunto de clausura no vacía las siguientes proposiciones son equivalentes

i) $x \in \bar{A}$

ii) $d(x\ A) = \inf \{ d(x,y) \ / \ y \in A \} = 0$

iii) Para todo entorno S de x $S \cap A \neq \phi$

Proposición 2 10 Sea (E d) un espacio métrico y A un conjunto sobre (E d) A es cerrado si y sólo si su complemento es abierto

Corolario 2 1 A es abierto si y sólo si su complemento es cerrado

Proposición 2 11

i) La unión de un número finito de cerrados es un conjunto cerrado

ii) La intersección arbitraria de una familia de cerrados es un conjunto cerrado

Proposición 2 12 Toda esfera cerrada así como toda superficie esférica es un conjunto cerrado

Proposición 2 13 Sea (E d) un espacio métrico Si A y B son conjuntos cualesquiera de (E d) entonces

$\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$ $\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Proposición 2 14 Sea (E d) un espacio métrico y A un conjunto cualquiera de este espacio métrico entonces se verifica

$$\overline{E-A} = E - \mathring{A} \qquad E - \overline{A} = (E - A)^{\circ}$$

CONJUNTO ACOTADO

Definición 2 13

Sea (E d) un espacio métrico y A un conjunto no vacío en el espacio métrico (E d) Decimos que A es acotado si existe algún número real k > 0 tal que para todo elemento x y de A tenemos que $d(x\ y) \leq k$

Observación 2 10 Todo subconjunto no vacío de un conjunto acotado es también acotado

CONJUNTO PRECOMPACTO o TOTALMENTE ACOTADO

Definición 2 14

Decimos que el conjunto A es precompacto si a cualquier número real $\epsilon > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $x_1\ x_2\ \ldots, x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k,\epsilon)$

Observaciones 2 11

1) Si A es finito entonces A es precompacto

2) Si A es precompacto no necesariamente A es finito

Proposición 2 15 En un espacio métrico cualquiera todo conjunto precompacto es acotado

Proposición 2 16 Sea (E d) un espacio métrico Si A es un conjunto precompacto sobre (E,d) todo subconjunto no vacío de A es precompacto

CONJUNTO DENSO

Definición 2 15

Sea (E d) un espacio métrico Un conjunto A de (E d) es denso si $\bar{A} = E$

Observaciones 2 12

1) Trivialmente el conjunto E es denso, además es el único conjunto cerrado y denso ya que si A fuese denso y cerrado entonces $A = \bar{A} = E$

2) Existen subconjuntos propios que son densos por ejemplo, el conjunto de los números racionales Q en la recta real es denso y constituye el ejemplo clásico

3) El conjunto de los numeros irracionales ($\mathbb{I}$) es denso en $\mathbb{R}$

CONJUNTO SEPARABLE

Definición 2 16

Sea (E d) un espacio métrico Se dice que un conjunto no vacío A en el espacio métrico (E d) es separable si existe un conjunto contable S con $S \subset A$ tal que $A \subset \overline{S}$

Observaciones 2 13

1) Se dice que el espacio métrico (E d) es separable, si el conjunto E es separable En este caso la definición se reduce a que existe un conjunto denso y contable
2) La recta real es el ejemplo clásico de espacio separable ya que el conjunto (Q) de los numeros racionales es denso y contable
3) Todo conjunto contable (incluyendo los finitos) es separable

CONTINUIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS

Con los resultados sobre continuidad que presentamos en esta sección intentamos cubrir las propiedades básicas sobre este tema Como no pretendemos discutir detalladamente al respecto hemos decidido omitir las demostraciones

CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Definición 2 17

Sean (E d) y (F d) espacios métricos cualesquiera y A un subconjunto de E Consideremos una función

$f \; A \subset E \to F$

Decimos que f es continua en un punto $a \in A$ si a todo entorno T de f(a) corresponde un entorno S de a tal que $f(S \cap A) \subset T$ es decir para todo $x \in S \cap A$ $f(x) \in T$

Proposición 2 17 Si (X d) (Y d) son espacios métricos y $x \in X$ entonces $f \; X \to Y$ es continua en x si y sólo si para cada sucesión $\{ x_n \}$ en X que converge a x, la sucesión $\{ f(x_n) \}$ en Y converge a f(x)

Proposición 2 18 Sean (E d), (F d) (G d) espacios métricos $f \; A \subset E \to F$ $g \; B \subset F \to G$ con $f(A) \subset B$

Si f es continua en el punto $a \in A$ y g es continua en f(a) entonces $g \circ f$ es continua en a

CONTINUIDAD EN UN CONJUNTO

Definición 2 18

Sea (E d) un espacio métrico y f $A \subset E \to F$ Decimos que f es continua en el conjunto A si f es continua en todo punto de A

Proposición 2 19 Sean (E d) (F d) (G d) espacios métricos y f $A \subset E \to F$ g $B \subset F \to G$ con $f(A) \subset B$
Si f es continua en A y g es continua en f(A) entonces $g \circ f$ es continua en A

Proposición 2 20 Sean (E d) (F d) espacios métricos y f $A \subset E \to F$ donde A es abierto f es continua en A si y sólo si para todo conjunto T abierto en (F d) $f^{-1}(T)$ es abierto en (E d)

Como consecuencia de la Proposición 2 20 y el Corolario 2 1 obtenemos

Proposición 2 21 Sea f $A \subset E \to F$ donde A es cerrado f es continua en A si y sólo si para todo conjunto T cerrado en (F d) $f^{-1}(T)$ es cerrado en (E d)

CONTINUIDAD UNIFORME

Definición 2 19

Sean (E d) (F,d) espacios métricos Decimos que

la función f $A \subset E \to F$ es uniformemente continua en el conjunto A si a cada $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que para todo x y $\in$ A con $d(x\ y) < \delta$
$d\ (f(x)\ f(y)) < \epsilon$ Toda función uniformemente continua es de hecho continua

CUBRIMIENTO

Definición 2 20

Sea (E d) un espacio métrico La familia de conjuntos $A_i = \{ A_i\ ,\ i \in I \}$ es un cubrimiento de E si se cumple que $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ El conjunto I de los subíndices

puede ser arbitrario puede ser numerable e incluso infinito no numerable o finito en éste ultimo caso el cubrimiento se llama cubrimiento finito
Si para cada $i \in I$ A_i es abierto entonces el cubrimiento se llama cubrimiento abierto

Ejemplo 2 11

1 $A_n = (\ -1/n \quad 2 - 2/n\ )$ $n \in N$ es un cubrimiento abierto del conjunto $E = [\ 0\ 1\ ]$ ya que

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-\ 1\ 2\ ) \supset [\ 0\ 1\ ]$ obsérvese además que

$A_1 = (-1,0)$ $A_2 = (-\frac{1}{2}$ $1)$, $A_3 = (-\frac{1}{3}$ $4/3) \supset E$ $A_4 = (-\frac{1}{4}, 3/2) \supset E$ $A_n = (-1/n$ $(2n-2)/n)$ Nótese también que $E - A_1 = E$ $E - A_2 = \{ 1 \}$ $E - A_i = \phi$ si $i \geq 3$ y como E $\{ 1 \}$ y ϕ son cerrados contenidos en E entonces se tiene que $(E - A_i)_{i\in I}$ es una familia de cerrados de E lo que es obvio si recordamos que el complemento de un conjunto abierto es cerrado

2 $B_n = (-n$ $n)$, $n \in N$ es un cubrimiento abierto de toda la recta numérica representada por $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

REFINAMIENTO DE UN CUBRIMIENTO

Definición 2 21

Se dice que el cubrimiento $V = \{ V_j$ $j \in J \}$ es más fino que el cubrimiento $M = \{ V_\alpha$ $\alpha \in I \}$ si para cada $j \in J$ existe $\alpha \in I$ tal que $V_j \subset V_\alpha$

Ejemplo 2 12 $B_k = (-1/k^2$ $1 - 1/k)$ $k \in N$ es más fino que $A_n = (-1/n$ $2 - 2/n)$ $n \in N$ ya que $B_1 \subset A_1$ $B_2 \subset A_2$

ϵ-RED

Definición 2 22

Sea $(E$ $d)$ un espacio métrico Un subconjunto finito $F = \{ x_1$ x_2 $x_n \}$ del espacio métrico $(E$ $d)$ se llama

ϵ-red si la familia $\{ B (x_i \epsilon) \quad i = 1 \ 2 \quad n \}$ constituye un cubrimiento de E es decir cuando $d (x F) < \epsilon$ para todo $x \in E$

NÚMERO DE LEBESGUE

Definición 2 23

Sea $M = \{ V_\alpha \quad \alpha \in I \}$ un cubrimiento cualquiera de E Si el cubrimiento $\{ B (x \ \delta) \quad x \in E \}$ formado por todas las bolas de radio δ es más fino que M, entonces se dice que δ es un número de Lebesgue para el cubrimiento M

A continuación presentaremos cinco criterios diferentes de compacidad que nos ayudarán a mostrar que un problema puede ser resuelto utilizando cualesquiera de ellos

CRITERIOS DE COMPACIDAD

Las siguientes definiciones de compacidad que hemos llamado criterios son algunas de las múltiples alternativas que se tienen para abordar el tema Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que las formulaciones son equivalentes y preparan el terreno para la discusión de la próxima sección

En cualquier espacio métrico (E d) las propiedades siguientes son equivalentes

C1 Todo cubrimiento abierto de E posee un subcubrimiento finito de E

C2 Toda familia de cerrados de E de intersección vacía contiene una subfamilia finita de intersección vacía

C3 Toda familia de cerrados de E en la que cualquier subfamilia finita es de intersección no vacía es a su vez de intersección no vacía

C4 Toda sucesión de puntos en E posee una subsucesión convergente en E

C5 Para todo cubrimiento abierto de E existe un número $\delta > 0$ de Lebesgue y a cada $\epsilon > 0$ le corresponde una ϵ-red en E

<u>Demostración</u>

C1 $\Rightarrow$ C2 es evidente ya que C1 y C2 son enunciados duales Recordar aclaración dada en el ejemplo 2 11 1

C2 $\Rightarrow$ C3 es obvio debido a que C3 no es más que otra versión de C2

Note que en lugar de C4 se puede colocar lo siguiente

<u>Toda sucesión en E posee un atractor en E</u>

C3 $\Rightarrow$ C4 Sea (x_n) una sucesión en $(E \; d)$ y se considera para cada n la sucesión final $S_n = \{ x_m \;\; m \geq n \}$ luego $\{ \overline{S_n} \}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia decreciente de cerrados en E, con la propiedad de cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía entonces por C3 existe al menos un $x \in \bigcap_{n \in N} \overline{S_n}$ el cual resulta ser un atractor de la sucesión (x_n) ya que

$x \in \overline{S_n} \quad \forall n \in N$

$x \in \overline{S_1} \Rightarrow \exists\, n_1 \geq 1$ con $x_{n_1} \in S_1$ y $d(x \;\; x_{n_1}) < 1$

$x \in \overline{S_2} \Rightarrow \exists\, n_2 > n_1$ con $x_{n_2} \in S_2$ y $d(x \;\; x_{n_2}) < \frac{1}{2}$

$x \in \overline{S_3} \Rightarrow \exists\, n_3 > n_2$ con $x_{n_3} \in S_3$ y $d(x \;\; x_{n_3}) < \frac{1}{3}$

$x \in \overline{S_k} \Rightarrow \exists\, n_k > n_{k\;1}$ con $x_{n_k} \in S_k$ y $d(x \;\; x_{n_k}) < 1/k$

De esta manera hemos construido una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $d(x \;\; x_{n_k}) < 1/k \quad \forall k \in N$

Entonces $x_{n_k} \to x$ por consiguiente x es un atractor de (x_n)

C4 $\Rightarrow$ C5 (Por reducción al absurdo)

1 Supongamos que existe un cubrimiento abierto M de E para el cual no existe ningun numero de Lebesgue Esto significa que para cada $n \in N$ existe un punto $x_n \in E$ tal que la bola $B(x_n \quad 2^{n})$ no está contenida en algun $V \in M$ Por hipótesis (x_n) tiene un atractor $x \in E$ Sea $x \in V \in M$, entonces existe un $k \in N$ tal que la bola $B(x, 2^{k}) \in V$ luego segun la desigualdad triangular se cumple que para todo $y \in B(x, 2^{k\,1})$ $B(y \quad 2^{k\,1}) \subset B(x \quad 2^{k}) \subset V$ Esto implica que $x_n \notin B(x \quad 2^{k\,1})$ para todo $n \geq k+1$ lo que es una contradicción con el hecho de que x es un atractor de (x_n)

2 Supongamos que existe un $\epsilon_0 > 0$ al que no le corresponde ϵ_0-red, entonces E no puede cubrirse por un número finito de bolas de radio ϵ_0 Por inducción, puede seleccionarse una sucesión de puntos $x_n \in E$ tal que

$$x_{n+1} \in E - \bigcup_{i\,1}^{n} B(x_i \ \epsilon_0) \quad n \in N \quad \text{Entonces } d(x_n \ x_m) \geq \epsilon_0$$

para $m\ n \in N$ $m \neq n$ Luego para cada $x \in E$ la bola $B(x\ \epsilon_0/2)$ contiene a lo sumo un punto de la sucesión (x_n) es decir (x_n) no tiene un atractor en E lo que constituye una contradicción con C4

C5 $\Rightarrow$ C1 Sea $M = \{ v_\alpha \quad \alpha \in I \}$ un cubrimiento abierto de E entonces existe un número de Lebesgue $\delta > 0$ para M y existe una sucesión finita x_1 x_2 x_n tal que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i \; \delta)$$

Para k = 1 2 n existen abiertos $V_{i_k} \in M$ que contienen a las bolas respectivas $B(x_k \; \delta)$ y por tanto $\{ V_{i_1} \; V_{i_2} \quad V_{i_n} \}$ es un subcubrimiento finito de E con lo que se obtiene C1

CONJUNTO COMPACTO

Definición 2 24

Un espacio métrico (E,d) se dice compacto si cumple alguna de las propiedades equivalentes C1 - C5

Un subconjunto C $C \neq \phi$, de E es compacto si lo es el subespacio $(C \; d_c)$ (d_c es la métrica inducida por d sobre C)

PROPIEDAD BOLZANO-WEIERSTRASS

Definición 2 25

Decimos que el conjunto A posee la propiedad Bolzano-Weierstrass, si todo subconjunto infinito T de A admite un punto de acumulación en A es decir $T \cap A \neq \phi$ A estos conjuntos los representaremos por BW

Como estudiamos en el capítulo anterior esta propiedad es la segunda definición de compacto que se encuentra en la nota de Fréchet en 1904

Proposición 2 22 Sea (E d) un espacio métrico Si x y son puntos de un espacio métrico (E d) tales que $x \neq y$ existe un entorno S de x y un entorno T de y con $S \cap T = \phi$

Proposición 2 23 Sea (E d) un espacio métrico Consideremos un conjunto compacto A y x un punto ambos en un espacio métrico Si $x \notin A$ existe un entorno S de x y un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \phi$

Corolario 2 2 Sea (E d) un espacio métrico cualquiera Todo conjunto compacto en (E d) es cerrado

Demostración

Sea A un conjunto compacto en (E d) Si $A = E$ sabemos que A es cerrado Supongamos que A es un subconjunto propio de E y tomemos un $x \notin A$, es decir $x \in E-A$

Por la proposición 2 23 existe un entorno S de x y un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \phi$ Pero entonces $S \cap A = \phi$ lo cual implica por la proposición 2 11 que $x \notin \bar{A}$

Entonces tenemos que $(E-A) \cap \bar{A} = \phi$ de donde $\bar{A} \subset A$ es decir

$A = \bar{A}$ Luego A es cerrado

Proposición 2 24 Sea (E,d) un espacio métrico Todo conjunto compacto en (E d) es precompacto

Demostración Sea A un conjunto compacto y $\epsilon > 0$ un número real La familia de esferas abiertas $N (x \epsilon)$ para todo $x \in A$ es evidentemente un cubrimiento abierto de A Por C1 tenemos un subcubrimiento finito

$\{ N(x_1 \epsilon)\ N(x_2,\epsilon) \qquad N(x_n \epsilon) \}$ es decir

$A \subset \bigcup_{i\ 1}^{n} N(x_i\ \epsilon)$, donde $x_1, x_2 \qquad x_n \in A$

Corolario 2 3 Todo conjunto compacto en un espacio métrico es acotado

La caracterización de los conjuntos compactos de la recta real como cerrados y acotados como hemos visto fue uno de los ideales centrales que impulsaban el interés de generalizar el concepto de compacidad Los Corolarios 2 2 y 2 3 aseguran que en espacios métricos los conjuntos compactos son cerrados y acotados Sin embargo lo recíproco no es siempre válido Existe una gran variedad de ejemplos, pero el lector puede servirse del siguiente Sobre el conjunto Q de los números racionales visto como subespacio de la recta real consideremos el conjunto

$A = \{ x \in Q \quad a < x < b \}$, donde $a\ b \in \mathbb{R}$ Si a y b son irracionales $a < b$ Entonces A es cerrado (en Q) y acotado pero no compacto

Proposición 2 25 Sea (E d) un espacio métrico Un conjunto A en el espacio métrico (E d) es compacto si sólo si es BW

Proposición 2 26 Sea (E d) un espacio métrico y $A \subset E$ Si B es un subconjunto no vacío y cerrado de un conjunto compacto A entonces B es compacto

CONJUNTO RELATIVAMENTE COMPACTO

Definición 2 26

Sea (E d) un espacio métrico Decimos que un conjunto A no vacío en un espacio métrico (E d) es relativamente compacto si su clausura es compacta

Proposición 2 27 Sea (E d) un espacio métrico y $A \subset E$ Si B es un subconjunto no vacío de un conjunto relativamente compacto A entonces B es relativamente compacto

Proposición 2 28 Sea (E d) un espacio métrico Todo conjunto relativamente compacto en un espacio métrico (E,d) es precompacto

Proposición 2 29 Sean (E d) y (Y d) espacios métricos si $f\ X \to Y$ es continua y si X es compacto entonces $f(X) \subset Y$ es compacto

<u>Demostración</u> Sea $\{ V_\alpha \}$ un recubrimiento abierto de $f(X)$ Como f es continua por la proposición 2 20 todos los conjuntos $f^{-1}(V_\alpha)$ son abiertos Como X es compacto tenemos un numero finito de índices $\alpha_1\ \alpha_2\ \ \alpha_n$ tales que

$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \quad \cup f^{-1}(V_{\alpha_n})$

Luego $f(f^{-1}(E)) = E$ para todo $E \subset Y$ Entonces implica que

$f(X) \subset (V_{\alpha_1}) \cup \quad \cup (V_{\alpha_n})$ Así $f(X)$ es compacto

<u>Lema 2 1</u> Un conjunto compacto A en la recta real admite extremos inferior y superior Ambos extremos pertenecen a A

<u>Los siguientes resultados son aplicaciones del concepto de compacidad</u>

<u>Proposición 2 30</u> (Weierstrass) Sea $(E\ d)$ un espacio métrico Si $f\ A \subset E \to \mathbb{R}$ es continua en el conjunto compacto A entonces f alcanza en A máximo y mínimo absolutos

<u>Demostración</u> Por la proposición 2 29 el conjunto $f(A)$ en la recta real, es compacto y, por el lema 2 1 , existen $\alpha = \inf(A)$ $\beta = \sup f(A)$, $\alpha\ \beta \in f(A)$

Como α,β pertenecen al rango de f, deben existir puntos $a\ b \in A$ con $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$

Además para todo $x \in A$ $f(x) \in f(A)$ luego $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ es decir que f alcanza en a un mínimo absoluto y en b un máximo absoluto

En el capítulo anterior estudiamos que Fréchet extiende este resultado al caso de un espacio más general con la topología de la convergencia de sucesiones

Proposición 2 31 (Heine) Sea (E d) un espacio métrico Si $f\ A \subset E \to F$ es continua en el conjunto compacto A entonces f es uniformemente continua en A

Demostración Sea $\epsilon > 0$ Para cada punto $a \in A$ como f es continua en él existe un $r > 0$ que corresponde a $\epsilon/2$ tal que, para todo $x \in A \cap N(a\ r)$ $d\ (\ f(x)\ f(a)\ ) < \epsilon/2$

Además la familia de esferas $N(a\ r/2)$ con $a \in A$ es claramente un cubrimiento abierto del conjunto compacto A

Luego existen esferas $N(a_1\ r_1/2)$ $N(a_2\ r_2/2)$, , $N(a_n, r_n/2)$

tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(a_i\ r_i/2)$

Sea $\delta = \min\ \{\ r_1/2,\ r_2/2\quad ,\ r_n/2\ \}$

Tenemos ahora que para todo $x\ y \in A$ con $d(x\ y) < \delta$ se tiene que $x \in N(a_i, r_i/2)$ (para algún $i = 1\ 2\quad , n$) de donde obtenemos

$d(y\ a_i) \leq d(x\ y) + d(x\ a_i) < \delta + r_i/2 < r_i$

es decir que $x,y \in A \cap N(a_i\ r_i)$, entonces

$d\ (\ f(x)\ f(a_i)\ ) \leq \epsilon/2$ $d\ (\ f(y)\ f(a_i)\ ) \leq \epsilon/2$ luego

$d(f(x), f(y)) < d(f(x), f(a_i)) + d(f(y), f(a_i)) < \epsilon$

En la presentación histórica del concepto de compacidad advertimos que E Heine utiliza la propiedad de los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ como una técnica para demostrar la proposición 2 31

APLICACIONES DE LOS CRITERIOS DE COMPACIDAD

El uso de distintas definiciones y varias alternativas para la demostración de la compacidad en espacio métrico enriquecen la docencia y favorecen el aprendizaje en situaciones que plantean retos cognitivos a los estudiosos ya que los interesados serán parte activa en el proceso de enseñanza-aprendizaje

Este enfoque puede sustentarse fácilmente por medio de los contenidos que se requieren para comprender la compacidad

Es por ello que los estudiantes deben dominar tanto el contenido como el concepto de abstracción que corresponde a la complejidad del tema

En este capítulo presentaremos cinco formas diferentes de demostrar la compacidad de un subconjunto con el fin de mostrar que un problema puede ser resuelto utilizando diversos criterios

Ejemplo 2 13 Sean (E, d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión en E que converge a un punto $x \in E$

Si $C = \{ x_n \quad n \in N \} \cup \{ x \}$ entonces C es compacto en (E d)

Demostración por cada una de las caracterizaciones

1 Según C1 Todo cubrimiento abierto de E contiene un subcubrimiento finito de E

Sea $M = \{ V_\alpha \quad \alpha \in I \}$ un cubrimiento abierto de C

Si $x \in V_\beta$ para cierto $\beta \in I$ y como $\lim x_n = x$, entonces para un determinado N se cumple que $x_n \in V_\beta$ si $n \geq N$ y los puntos x_n con $n < N$ es una cantidad finita luego pueden cubrirse por una cantidad finita de V_α entonces según C1 el subconjunto C es un compacto en E

2 Segun C2 Toda familia de cerrados de E de intersección vacía contiene una subfamilia finita de intersección vacía

Si $B = \{ B_i \quad i \in I \}$ una familia de cerrados de C tal que

$$\bigcap_{i \in I} B_i = \phi$$

Como $x \notin \bigcap_{i \in I} B_i = \phi$ existe un $i_0 \in I$ tal que $x \notin B_{i_0}$

luego $x \in C - B_{i_0}$ el cual es abierto

Como $x_n \to x$ existe un $\mathbf{N} \in N$ tal que $x_n \in C - B_{i_0} \quad \forall n \geq \mathbf{N}$

O sea $\{ x_n \quad n \geq \mathbf{N} \} \cup \{ x \} \subset C - B_{i_0}$ por lo tanto

$B_i \subset \{ x_1 \quad x_2 \quad \quad x_{N-1} \}$

Como $x_1 \in \bigcap_{i \in I} B_i$ existe $i_1 \in I$ tal que $x_1 \in B_{i_1}$

$x_2 \in \bigcap_{i \in I} B_i$ existe $i_2 \in I$ tal que $x_2 \in B_{i_2}$

$x_{N-1} \in \bigcap_{i \in I} B_i$ existe $i_{N-1} \in I$ tal que $x_{N-1} \in B_{i_{N-1}}$

Es decir que $\bigcap_{j=0}^{N-1} B_{i_j} = \phi$ y $\{ B_i \quad B_{i_1} \quad \quad B_{i_{N-1}} \}$ es una subfamilia finita de B y según C2 el conjunto C es compacto

3 Según C3 Toda familia de cerrados de E en la que cualquier subfamilia finita es de intersección no vacía es a su vez de intersección no vacía

Es similar a (2) puesto que (C3) no es más que otra versión de (C2)

4 Segun C4 Toda sucesión de puntos en E posee una subsucesión convergente en E

Sea (b_n) una sucesión de puntos de C luego se puede construir una subsucesión (b_{n_k}) de (b_n) que es a su vez una subsucesión de (x_n) Como (x_n) converge a x se tiene que (b_{n_k}) converge a x luego x es un atractor de (b_k) por lo tanto según C4 el conjunto C es un compacto

El criterio C5 lo consideramos de interés teórico-metodológico para poder efectuar la cadena de implicaciones en la demostración del criterio de compacidad

CAPÍTULO III

COMPACIDAD EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos de la Topología General a fin de poder introducir el concepto de compacidad en espacios topológicos Muchos de los resultados han sido formalmente establecidos sobre todo aquellos cuyas demostraciones son idénticas a las anotadas en el capítulo II y que fueron formuladas para espacios métricos

Para concluir este trabajo discutiremos algunas situaciones que nos muestran claramente las dificultades naturales que se confrontan al tratar de desarrollar una Teoría de Compacidad en Espacios Topológicos partiendo de las experiencias adquiridas en los casos de Espacios Métricos y el sistema de los números reales

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición 3 1

Sean X un conjunto no vacío $\tau \subseteq P(X)$ Decimos que $(X\ \tau)$ es un espacio topológico (o que τ es una topología sobre X) si y sólo si se cumplen

T 1 $\phi \in \tau$ $X \in \tau$

T 2 Si $\{ A_i \}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ entonces

$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

T 3 Si A_1 $A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$

A los elementos de X los llamaremos puntos y a los elementos de τ los llamaremos τ-abiertos o simplemente abiertos en el caso de que no se preste a confusión

Ejemplos 3 1

a) Sea X un conjunto no vacío y tomemos $\tau_0 = \{ \phi \ X \}$ Es fácil verificar que τ_0 es una topología sobre X A τ_0 se le denomina la topología caótica

b) Sean X un conjunto no vacío y $\tau_\infty = P(X)$ Es claro que $(X \ \tau_\infty)$ es un espacio topológico A la topología τ_∞ se le denomina la topología discreta

c) Sean $(X \ d)$ un espacio métrico y τ_d la familia de subconjuntos de X definida como sigue Un subconjunto A de X pertenece a τ_d si y sólo si para cada $a \in A$ existe un $r>0$ tal que el conjunto $B(a \ r) = \{ x \in X \ / \ d(a \ x) < r \} \subseteq A$ Tenemos que $(X \ \tau_d)$ es un espacio topológico A τ_d se le denomina la topología inducida por la distancia d

d) El espacio topológico $(\mathbb{R} \ \tau_d)$ donde τ_d es la topología inducida por la métrica usual sobre $\mathbb{R}$ es sin duda uno de los espacios topológicos más importantes y ciertamente la noción de espacio topológico es una abstracción de algunas propiedades notables del sistema de los números reales

e) Sean X un conjunto no vacío y $\tau_f = \{A \subseteq X \ / \ A^c \text{ es finito}\} \cup \{ \phi \}$ Es fácil demostrar que τ_f es una topología sobre X

A la topología τ_f le llamamos la topología de los complementos finitos

f) Sean X un conjunto no vacío y $\tau_n = \{ A \subseteq X \,/\, A^c$ es numerable $\} \cup \{ \phi \}$ Es fácil demostrar que τ_n es una topología sobre X A la topología τ_n le llamamos la topología de los complementos numerables

g) Sean X un conjunto no vacío $p \in X$ y $\tau_p = \{A \subseteq X \,/\, p \in A\} \cup \{ \phi \}$ τ_p es una topología sobre X y la designamos como la topología concentrada en p

h) El ejemplo anterior puede ser generalizado de la siguiente manera Sean X un conjunto no vacío $B \subseteq X$ y $\tau_B = \{ A \subseteq X \,/\, B \subseteq A \} \cup \{ \phi \}$ τ_B es una topología sobre X y la designamos como la topología concentrada en B

ASPECTOS BÁSICOS

Definición 3 2 (Conjunto Interior)

Sean (X τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $\mathcal{S}_A = \{ B \in \tau \,/\, B \subseteq A \}$ Tenemos que $\mathcal{S}_A \neq \phi$ pues $\phi \in \mathcal{S}_A$

Por T 2 $\bigcup_{B \in \mathcal{S}_A} B$ es abierto y además es el mayor abierto, respecto a la inclusión de conjuntos contenido en A A este abierto lo llamamos conjunto interior de A y lo denotaremos por A^0 o int(A)

Proposición 3 1 Sean (X τ) un espacio topológico

A B $\subseteq$ X

Entonces

a) A es abierto si y sólo si $A = A^0$

b) $(A^0)^0 = A^0$

c) Si $A \subseteq B$ entonces $A^0 \subseteq B^0$

d) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$

e) $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$

Demostración (a) Supongamos que A es abierto Como $A \subseteq A$ tenemos que A es un abierto contenido en A Ya que A^0 es el mayor abierto contenido en A inferimos que $A \subseteq A^0$ Esto conjuntamente con $A^0 \subseteq A$ nos lleva a $A = A^0$ como A^0 es abierto entonces A es abierto

La afirmación (b) se deduce inmediatamente de (a) y del hecho que A^0 es abierto

Probemos (c) Supongamos que $A \subseteq B$ Tenemos entonces que $A^0 \subseteq A \subseteq B$ Por lo tanto A^0 es un abierto contenido en B y por otro lado B^0 es el mayor abierto contenido en B luego $A^0 \subseteq B^0$

La demostración de (d) está basada en (c) Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$ por (c) se tienen las relaciones $(A \cap B)^0 \subseteq A^0$ y $(A \cap B)^0 \subseteq B^0$ Así, $(A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0$

Por otro lado $A^0 \subseteq A$ y $B^0 \subseteq B$ Se tiene entonces $A^0 \cap B^0 \subseteq A \cap B$ Por (T 3) $A^0 \cap B^0$ es abierto, y además está incluido en $A \cap B$ de esto inferimos $A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0$

Hemos probado que $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$

De $A \subseteq A \cup B$ $B \subseteq A \cup B$ y aplicando (c) obtenemos

$A^0 \subseteq (A \cup B)^0$ y $B^0 \subseteq (A \cup B)^0$ Esto prueba (e)

Observación 3 1

La inclusión (e) puede en algunos casos ser estricta Considérese el ejemplo 3 1 (d) A el conjunto de los numeros racionales y B el conjunto de los números irracionales Entonces $A^0 = B^0 = \phi$ por lo tanto $A^0 \cup B^0 = \phi$ Pero $A \cup B = \mathbb{R}$ y $(A \cup B)^0 = \mathbb{R}$

Definición 3 3 (Punto Interior)

Sean $(X \tau)$ un espacio topológico $A \subseteq X$ $x \in X$ Decimos que x es un punto interior de A o simplemente interior a A si y sólo si $x \in A^0$

Utilizando lo antes discutido sobre un conjunto interior podemos establecer la siguiente proposición que es realmente central en la Teoría de Espacios Topológicos

Proposición 3 2 Sean $(X \tau)$ un espacio topológico $A \subseteq X$ $x \in X$ Entonces, x es un punto interior de A, si y sólo si, existe un abierto $O \in \tau$ tal que $x \in O \subseteq A$

Definición 3 4 (Conjunto Cerrado)

Sean $(X \tau)$ un espacio topológico y $A \subseteq X$ Decimos que A es τ-cerrado (o simplemente cerrado) si y sólo si su complemento $A^c = X \setminus A$ es abierto

Basados en las condiciones (T 1)-(T 3) se establecen las siguientes propiedades de los conjuntos cerrados

Proposición 3 3 Sean (X,τ) un espacio topológico Entonces

C 1 ϕ X son cerrados

C 2 Si $\{ A_i \}_{i\in I}$ es una familia de cerrados entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es cerrado

C 3 Si A_1 A_2 son cerrados entonces $A_1 \cup A_2$ es cerrado

Definición 3 5 (Adherencia)

Sean (X τ) un espacio topológico $A \subseteq X$ y $\mathfrak{C}_A = \{ B \subseteq X \ / \ B$ es cerrado y $A \subseteq B \}$ Tenemos que $\mathfrak{C}_A \neq \phi$ pues $X \in \mathfrak{C}_A$ Por (C 3) $\bigcap_{B\in\mathfrak{C}_A} B$ es cerrado y contiene a A aún más es el menor cerrado que contiene a A A este cerrado lo llamaremos clausura o adherencia de A y lo denotaremos $\bar{A}$ ó cl(A)

Proposición 3 4 Sean (X τ) un espacio topológico, $A,B \subseteq X$ Entonces,

a) A es cerrado si sólo si $A = \bar{A}$

b) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

c) Si $A \subseteq B$ entonces $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

d) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

e) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

<u>Demostración</u> (a) Supongamos que A es cerrado Como $A \subseteq A$ tenemos que A es un cerrado que contiene a A Ya que $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A inferimos que $\bar{A} \subseteq A$ Esto conjuntamente con $\bar{A} \subseteq A$ nos lleva a $\bar{A} = A$

Si $\bar{A} = \bar{A}$ como $\bar{A}$ es cerrado entonces A es cerrado

La afirmación (b) se deduce inmediatamente de (a) y del hecho que $\bar{A}$ es cerrado

Probemos (c) Supongamos que $A \subseteq B$ Tenemos entonces que $A \subseteq B \subseteq \bar{B}$ Por lo tanto $\bar{B}$ es un cerrado que contiene a A y por otro lado $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A luego $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

La demostración de (d) está basada en (c) Como $A \cap B \subseteq A$ y $\overline{A \cap B} \subseteq B$ por (c) se tienen las relaciones $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A}$

y $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{B}$ Así $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}\cap\overline{B}$

De $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$ obtenemos $\overline{A} \subseteq \overline{A\cup B}$ y $\overline{B} \subseteq \overline{A\cup B}$

y por lo tanto $\overline{A}\cup\overline{B} \subseteq \overline{A\cup B}$

Por otro lado $A \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq \overline{B}$, esto implica

$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ Por (C 3) y la inclusión anterior

tenemos que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado y contiene a $A \cup B$ De aquí

se infiere que $\overline{A\cup B} \subseteq \overline{A}\cup\overline{B}$ Esto prueba (e)

Observaciones 3 2

1) La inclusión (d) puede en algunos casos ser estrictas Por ejemplo se puede considerar el espacio topológico y los conjuntos A y B tratados en la Observación 3 1

2) La palabra cerrado ya tiene un significado en los espacios topológicos pero la palabra acotado no lo tiene Desafortunadamente, no hay forma adecuada de definir conjuntos acotados en espacios topológicos Esto nos impide hacer cualquier extensión directa de la propiedad cerrado y acotado a los espacios topológicos

Definición 3 6 (Punto de Adherencia)

Sean (X τ) un espacio topológico $A \subseteq X$ $x \in X$

Decimos que x es punto de adherencia de A (o adherente a A) si sólo si $x \in \bar{A}$

La siguiente caracterización para los puntos de adherencia es de gran utilidad

Proposición 3 5 Sean (X τ) un espacio topológico $A \subseteq X$, $x \in X$ Entonces x es un punto de adherencia de A si y sólo si todo abierto que contiene a x tiene intersección no vacía con A simbólicamente

$x \in A$, si sólo si, $\forall\, O \in \tau$ $x \in O$ se tiene $A \cap O \neq \phi$

Demostración Supongamos que $x \in \bar{A}$ y sea O un abierto tal que $A \cap O = \phi$ Si se demuestra que $x \notin O$ quedará establecida la condición necesaria de la proposición Si $A \cap O = \phi$ entonces $A \subseteq O^c$ Tenemos que O^c es cerrado y contiene a A por lo tanto $x \in \bar{A} \subseteq O^c$ Así $x \notin O$

Recíprocamente sea C un cerrado que contenga a A y probemos que $x \in C$ Como $A \subseteq C$ resulta que $A \cap C^c = \phi$ y C^c es abierto Por la hipótesis $x \notin C^c$ es decir $x \in C$ Por lo tanto $x \in \bar{A}$

Definición 3 7 (Conjunto Derivado)

Sean (X,τ) un espacio topológico $A \subseteq X$ $x \in X$

Decimos que x es un punto de acumulación de A si y sólo si $x \in \overline{A \setminus \{ x \}}$

Por la proposición 3 5 x es un punto de acumulación de A si y sólo si para todo abierto $O \in \tau$ tal que $x \in O$ se tiene $A \cap O \setminus \{ x \} \neq \phi$ Al conjunto de puntos de acumulación de un conjunto A lo llamamos conjunto derivado de A y lo denotamos A

Proposición 3 6 Sean (X τ) un espacio topológico $A \subseteq X$ Entonces $\bar{A} = A \cup A$

Demostración Como $A \setminus \{ x \} \subseteq \bar{A}$ es claro que todo punto de acumulación de A es un punto de adherencia de A es decir $A \subseteq \bar{A}$ De aquí se tiene $A \cup A \subseteq \bar{A}$ Por otro lado si $x \in \bar{A}$ y $x \notin A$ entonces $\overline{A \setminus \{ x \}} = \bar{A}$ Por lo tanto $x \in A$ Vemos así que $\bar{A} \subseteq A \cup A$ Con esto hemos probado la igualdad establecida en la proposición

Como consecuencia inmediata de la Proposición 3 5 tenemos el siguiente resultado

Corolario 3 1 Sean (X τ) un espacio topológico $A \subseteq X$ A es cerrado si y sólo si $A \subseteq A$

Proposición 3 7 Sean (X τ) un espacio topológico A B $\subseteq$ X Entonces

a) Si $A \subseteq B$ entonces $A \subseteq B$

b) $A \cup B = (A \cup B)$

c) $(A \cap B) \subseteq A \cap B$

__Definición 3 8 (Frontera)__

Sea (X τ) un espacio topológico $A \subseteq X$ la frontera de A es el conjunto denotado por Fr(A) y definido por

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A$

Es fácil demostrar que un conjunto tiene frontera vacía si y sólo si, es tanto abierto como cerrado

__Definición 3 9 (Espacios Conexos)__

Un espacio topológico (X τ) es conexo si y sólo si los unicos abiertos y cerrados de la topología τ son ϕ y X Equivalentemente si y sólo si los únicos conjuntos con frontera vacía son ϕ y X

__Definición 3 10 (Subespacios Topológicos)__

Sean (X τ) un espacio topológico $Y \subseteq X$ Consideremos el subconjunto τ^{Y} de P(Y) definido por $\tau^{Y} = \{ O \cap Y / O \in \tau \}$ Es fácil demostrar que (Y τ^{Y}) es un espacio topológico A la topología τ^{Y} la llamamos la topología inducida por τ sobre Y, y decimos que (Y,τ^{Y}) es un subespacio topológico de (X,τ)

Sean (X τ) es un espacio topológico y Y ⊆ X A ⊆ Y

Denotaremos por $\overline{A}_Y$ A_Y A_Y la adherencia interior y derivado respectivamente de A en el espacio topológico (Y τ^Y)

Proposición 3 8 Sean (X τ) un espacio topológico $A \subseteq Y \subseteq X$

Entonces

a) $A_Y = A \cap Y$

b) $\overline{A}_Y = \overline{A} \cap Y$

c) $A_Y = (Y^C \cup A) \cap Y$

Demostración Supongamos que $A_Y \neq \phi$ Sean $x \in A_Y$ y O un abierto de (X τ) que contenga x Entonces $O \cap Y$ es un abierto en (Y,τ^Y) que contiene a x, por lo tanto $O \cap Y \cap A \setminus \{ x \}$ es no vacío

Como $O \cap Y \cap A \setminus \{ x \} \subseteq O \cap A \setminus \{ x \}$, tenemos que $x \in A$ Así $x \in A \cap Y$ Por otro lado supongamos que $A \cap Y$ es no vacío Si $x \in A \cap Y$ y $O \cap Y$ es un abierto de (Y τ^Y) que contiene a x resulta que

$O \cap A \setminus \{ x \} = O \cap Y \cap A \setminus \{ x \} \neq \phi$ Por lo tanto $x \in A_Y$

Hemos probado la igualdad propuesta en (a) La afirmación (b) se deduce de (a) y lo establecido en la proposición 3 6 Invitamos al lector a justificar cada una de las igualdades en la siguiente secuencia, la cual nos lleva a establecer (b) $\bar{A}_Y = A \cup A_Y$

$$\bar{A}_Y = A \cup [\, A \;\cap Y \,]$$

$$\bar{A}_Y = [\, A \cap Y \,] \cup [\, A \;\cap Y \,]$$

$$\bar{A}_Y = [\, A \cup A \;\,] \cap Y$$

$$\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$$

Para demostrar (c) empleamos la definición de conjunto interior Tenemos que

$$A_Y = \bigcup (\, O \cap Y \,)$$

$$A_Y = \left(\bigcup O \right) \cap Y$$

$$A_Y = \left(\bigcup O \right) \cap Y$$

$$A_Y = (\, Y^C \cup A \,) \;\cap Y$$

En espacios métricos los conjuntos derivados son cerrados veremos que esta afirmación es válida para una clase de espacios topológicos en la que se incluyen los espacios métricos Ahora nos ocuparemos de establecer condiciones suficientes para que en un espacio topológico los conjuntos derivados sean cerrados

Ejemplo 3 2 Sea X un conjunto no vacío y τ_0 la topología caótica sobre X Si $\#(X) \geq 2$ y $x \in X$ se tiene que $\{ x \} = X \setminus \{ x \}$ no es cerrado

El ejemplo anterior aunque poco elegante nos muestra que en general los conjuntos derivados no son cerrados

ESPACIOS TOPOLÓGICOS T_1

Definición 3 11

Un espacio $(X \ \tau)$ se dice T_1, si y sólo si todos los subconjuntos finitos de X son cerrados

Esto es equivalente a afirmar que todos los subconjuntos unitarios son cerrados

En algunas ocasiones es conveniente contar con la siguiente caracterización de espacios T_1

Proposición 3 9 Un espacio topológico es T_1 si y sólo si para todo $x \ y \in X$ $x \neq y$ existe un abierto O tal que $x \in O$ y $y \notin O$

Demostración Supongamos que $(X \ \tau)$ es T_1 y sean $x \ y \in X$ $x \neq y$ Como $\{ y \}$ es cerrado tenemos que $\overline{\{ y \}} = \{ y \}$ Por lo tanto $x \notin \overline{\{ y \}}$ Por la Proposición 3 5 existe un abierto O que contiene a x tal que $O \cap \{ y \} = \phi$ es decir $y \notin O$

Recíprocamente sea $y \in X$ y probemos que el conjunto unitario $\{ y \}$ es cerrado Sea $x \in X \setminus \{ y \}$ Por lo supuesto existe un abierto O_x tal que $x \in O_x$ $y \notin O_x$ Tomemos $O = \bigcup_{x \in X \setminus \{y\}} O_x$ Resulta claro que $O = X \setminus \{ y \}$ además por (T 2) es abierto entonces $O^c = \{ y \}$ es cerrado

Proposición 3 10 Sean $(X \tau)$ un espacio topológico T_1 $Y \subseteq X$ Entonces (Y,τ^Y) es T_1

Demostración Sea $x \in Y$ Por la proposición 3 8 $\{ x \}_Y = \{ x \} \cap Y$ Como $\{ x \}$ es cerrado en el espacio $(X \tau)$, tenemos que $\{ x \} = \overline{\{ x \}}$ Esto implica que $\overline{\{ x \}_Y} = \{ x \}$ Hemos probado que todos los subconjuntos unitarios de Y son cerrados en $(Y \tau^Y)$ En consecuencia $(Y \tau^Y)$ es T_1

Observación 3 3

En los espacios topológicos T_1 los conjuntos derivados tienen la particularidad de ser cerrados Esto lo estableceremos haciendo uso del resultado contenido en la siguiente proposición

Proposición 3 11 Sean $(X \tau)$ un espacio topológico T_1 $A \subseteq X$ $x \in X$ Tenemos que x es un punto de acumulación de A si y sólo si para todo abierto O tal que $x \in O$ el conjunto $A \cap O$ es infinito

Demostración Si todo abierto O que contiene a x es tal que $A \cap O$ es infinito es evidente que x es un punto de acumulación de A Probaremos la condición necesaria Supongamos que existe un abierto O que contiene a x tal que $O \cap A$ es finito Entonces $B = O \cap A \setminus \{ x \}$ es finito y como $(X \tau)$ es T_1 se tiene que B es cerrado Por lo tanto $O \setminus B$ es abierto además $x \in O \setminus B$ y $A \cap O \setminus B \subseteq \{ x \}$ Hemos probado así que $x \notin A$

Proposición 3 12 Sean $(X \tau)$ un espacio topológico T_1 $A \subseteq X$ Entonces A es cerrado

Demostración Es suficiente demostrar que $(A) \subseteq A$ Podemos suponer que $(A) \neq \phi$ Sea p un punto de (A) y O un abierto que contiene a x Entonces O debe contener al menos un punto y de A Como O es abierto, $y \in O$, $y \in A$ se sigue de la proposición anterior que O contiene infinitos puntos de A Así $x \in A$

La condición que los conjuntos derivados sean cerrados no caracteriza a los espacios T_1 como vemos en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3 3

Consideremos un conjunto X con $\# (X) > 2$ $p \in X$ y τ_p la topología concentrada en p (Ejemplo 3 1 g) Como el conjunto $\{ p \}$ no es cerrado $(X \tau_p)$ no es T_1

Sea $A \subseteq X$ y supongamos que $A \neq \phi$ Supongamos que $p \in A$ Entonces $p \in \overline{A \setminus \{ p \}}$ Como $\{ p \}$ es un abierto que contiene a p se tiene que $A \setminus \{ p \} \cap \{ p \} \neq \phi$ Esto es contradictorio Luego $p \notin A$ Por la definición de τ_p concluimos que A es cerrado

A continuación discutiremos algunas propiedades relevantes de la topología de los complementos finitos (ejemplo 3 1 e)

Proposición 3 13 Sean X un conjunto no vacío τ_f la topología de los complementos finitos sobre X Entonces

a) $(X \ \tau_f)$ es un espacio topológico T_1

b) Si τ es una topología sobre X tal que $(X \ \tau)$ es T_1, se tiene que $\tau_f \subseteq \tau$

c) $(X \ \tau_f)$ es conexo si y sólo si X es infinito

Demostración La afirmación (a) es inmediata, pues todos los subconjuntos finitos son cerrados en $(X \ \tau_f)$

Demostremos (b) Sea τ una topología sobre X tal que $(X \ \tau)$ es T_1 Sea $A \in \tau_f$ y supongamos que $A \neq \phi$ Entonces A^c es finito por lo tanto A^c es τ-cerrado y así A es τ-abierto Con esto hemos probado que $\tau_f \subseteq \tau$ Supongamos que $(X \ \tau_f)$ no es conexo y probemos que X es finito Sea $A \subseteq X$ $A \neq \phi$ tal que A es abierto y cerrado Tenemos entonces que A^c es finito por ser A abierto no vacío y además A es finito por ser cerrado y distinto de X Por lo tanto $X = A \cup A^c$ es finito

Observación 3 4

Las afirmaciones (a) y (b) de la proposición anterior nos dicen que si X es un conjunto no vacío la topología de los complementos finitos es la menor topología τ sobre X tal que (X τ) es T_1 Si X es finito, $\tau_f = P(X)$

Proposición 3 14 Sean X un conjunto no vacío $\phi \neq Y \subseteq X$ La topología de los complementos finitos sobre X induce sobre Y la topología de los complementos finitos A los espacios topológicos T_1 también se les denomina, espacio H ó espacio accesible de Fréchet

ESPACIOS TOPOLÓGICOS T_2

Definición 3 12

Un espacio topológico (X τ) se dice T_2 (separado o de Hausdorff) si y sólo si dados x y $\in$ X, $x \neq y$ existen abiertos disjuntos O_x O_y tales que $x \in O_x$ $y \in O_y$
Por la proposición 3 9 se obtiene inmediatamente

Proposición 3.15 Todo espacio topológico T_2 es T_1

Los ejemplos clásicos de espacios topológicos T_2 son los espacios métricos afirmación que enunciamos en la siguiente proposición

Proposición 3 16 Todo espacio métrico es un espacio topológico T_2

Demostración Sean (X d) un espacio métrico, x y $\in$ X $x \neq y$ Entonces $r = d(x\ y) > 0$ Tomemos $O_x = B(x\ r/2)$ y

$O_y = B(y\ r/2)$ Es claro que $x \in O_x$ $y \in O_y$ Además $O_x \cap O_y \neq \phi$ En efecto si $z \in O_x \cap O_y$ entonces $d(x\ z) < r/2$ $d(y\ z) < r/2$ Empleando la desigualdad triangular obtenemos

$r = d(x\ y) \leq d(x\ z) + d(y\ z) < r/2 + r/2 = r$ Esto es contradictorio así $O_x \cap O_y = \phi$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior tenemos

Proposición 3 17 Todo espacio métrico es un espacio topológico T_1

El recíproco de la proposición 3 15 no es en general válido como vemos en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3 4

Si X es un conjunto infinito y τ_f la topología de complementos finitos sobre X tenemos que (X τ_f) es T_1 (Proposición 3 13) Veamos que (X τ_f) no es T_2 Sean A B abiertos no vacíos Entonces A^c, B^c son finitos Por lo tanto $A^c \cup B^c$ es finito Como X es infinito por lo tanto $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \subseteq X$ Esto implica que $A \cap B \neq \phi$ Hemos probado que todo par de abiertos no vacíos tiene intersección no vacía

Esto demuestra que (X, τ_f) no es T_2

Proposición 3 18 Sean (X τ) un espacio topológico T_2 $Y \subseteq X$ Entonces (Y τ^Y) es T_2

La demostración es relativamente sencilla y la proponemos al lector como ejercicio

FUNCIONES CONTINUAS EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición 3 13

Sean (X τ_1) (Y τ_2) espacios topológicos y f X $\rightarrow$ Y x $\in$ X f es continua en x si para cualquier vecindad N de f(x) en (Y τ_2) existe una vecindad M de x en (X τ_1) que satisface f(M) $\subset$ N

Proposición 3 19 Si (X τ_1), (Y τ_2) son espacios topológicos y f X $\rightarrow$ Y, entonces f es continua si y sólo si para toda V $\in$ τ_2 f^{1}(V) $\in$ τ_1

Demostración Si f^{1}(V) = ϕ no hay nada que demostrar, puesto que necesariamente ϕ $\in$ τ_1 Si x $\in$ f^{1}(V) $\neq$ ϕ entonces f(x) $\in$ V

Como V es una vecindad de f(x) y f es continua existe un abierto M que contiene a x tal que f(M) $\subseteq$ V

Así x $\in$ M $\subseteq$ f^{1}(V) Esto prueba que en X f^{1}(V) es abierto

Recíprocamente sea x $\in$ X y sea V un abierto de Y que contenga a f(x) Por hipótesis f^{1}(V) es abierto y además x $\in$ f^{1}(V) Así M = f^{1}(V) es un abierto que contiene a x para lo cual se cumple f(M) $\subseteq$ V Por lo tanto f es continua en x

Proposición 3 20. Sean (X τ_1) (Y,τ_2) espacios topológicos y f X → Y Los siguientes enunciados son equivalentes

i) f es continua

ii) Si G es cerrado en (Y τ_2) entonces f^{-1}(G) es cerrado en (X τ_1)

iii) Para todo subconjunto A de X $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Definición 3 14 (Cubrimiento)

Sea (X τ) un espacio topológico A ⊂ X y O una familia de subconjuntos de X tal que A ⊂ ∪ O, la familia O se denomina cubrimiento de A Si además O ⊂ τ O se llama cubrimiento abierto de A

CRITERIOS DE COMPACIDAD

Proposición 3 21

En todo espacio topológico (X τ) las siguientes propiedades son equivalentes

C1 Todo cubrimiento abierto de X contiene un subcubrimiento finito

C2 Toda familia de cerrados de X de intersección vacía contiene una subfamilia finita también de intersección vacía

C3 Toda familia de cerrados de X en la que cualquier subfamilia finita es de intersección no vacía es a su vez de intersección no vacía

Definición 3 15 (Espacio Compacto)

Un espacio topológico (X τ) se dice compacto cuando cumple las propiedades equivalentes C2 - C3

Observación 3 5

Bourbaki y otros matemáticos emplean la palabra casicompacto en lugar de compacto para designar este concepto y se reservan compacto para los espacios de Hausdorff o sea T_2-compactos por ser éstos los más frecuentes en las aplicaciones

Definición 3 16 (Subconjunto Compacto)

Decimos que un subconjunto C de (X τ) es compacto si lo es como subespacio de (X τ)

De acuerdo con el concepto de subespacio topológico C en (X τ) es compacto si y sólo si para toda familia de abiertos $(A_s)_{s\in I}$ de (X τ) tal que

$C \subset \bigcup_{s\in I} A_s$ ($\Rightarrow C = \bigcup_{s\in I} (C \cap A_s)$) existe una subfamilia finita $(A_{\alpha k})_{1 \leq k \leq n}$ para la cual también

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{\alpha k} \Rightarrow C = \bigcup_{k=1}^{n} (C \cap A_{\alpha k})$$

Definición 3 17 (Subconjunto Relativamente Compacto)

Un subconjunto A en un espacio topológico (X τ) se llama relativamente compacto si su clausura en (X τ) es compacta

Proposición 3 22 Sea (X τ) un espacio topológico compacto Todo conjunto cerrado en (X τ) es compacto

Proposición 3 23 Sean ($X\ \tau_1$) (Y,τ_2) espacios topológicos f X → Y continua si ($X\ \tau_1$) es compacto entonces f(X) es compacto

La demostración es exactamente la misma que se dio en la Proposición 2 29

Observación 3 6

En el corolario 2 2 demostramos que en un espacio métrico todo compacto es cerrado Cuando el espacio es topológico esto no es en general cierto es decir

Si (X τ) es un espacio topológico $A \subset X$, A es compacto esto no implica que A es cerrado

Contraejemplo 3 1

Sea X un conjunto finito cualquiera card(X) > 1 $p \in X$

$\tau_p = \{ A \subseteq X \ / \ p \in A \} \cup \{\phi\}$ luego tenemos

1) {p} es compacto

2) {p} no es cerrado

En un espacio de Hausdorff todo compacto es cerrado esto justifica lo aclarado en la Observación 3 5

Proposición 3 24 Sea (X τ) un T_2-espacio compacto $A \subseteq X$ A no vacío Si A es compacto entonces A es cerrado

Demostración Sea A un subconjunto compacto de un espacio X de T_2 supongamos que $p \in X-A$ (Probaremos que $p \notin A$) Como X es un espacio T_2 para cada x en A existen abiertos disjuntos U_x, V_x tales que $x \in U_x$ y $p \in V_x$

Tenemos que { U_x $x \in A$ } es un cubrimiento de A Como A es compacto hay un subcubrimiento finito { U_{x_1} U_{x_2} U_{x_k} } de A

El conjunto $\bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ es un abierto que contiene a p y no contiene puntos de A Por lo tanto $p \notin A$ Así hemos probado que $A^c \subseteq (A)^c$ lo que es equivalente a $A \subseteq A$ Esto demuestra que A es cerrado

CONCLUSIONES

Con los trabajos de Bolzano Borel Heine y Weierstrass el concepto de compacidad resultó de gran utilidad para la obtención de algunos resultados que hoy en día son considerados como clásicos

Maurice Fréchet por su parte reconoció la importancia de extender el concepto a espacios más generales y conjuntamente con Alexandrov y Urysohn logran la consolidación matemática del Concepto de Compacidad

En el intento de "encontrar" la definición "más adecuada" para la compacidad en espacios más generales aparecen una cierta cantidad de alternativas, cada una con su propia importancia

Las diferentes formas posibles de introducir el concepto de compacidad puede dificultar su aprendizaje, por tal razón contar con ejemplos y situaciones que ilustren la aplicabilidad de cada criterio de compacidad, pueden ser de utilidad para facilitar el proceso de transposición didáctica

La generalización del concepto de compacidad a espacios topológicos confronta tanto a los estudiantes como a los profesores con la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, situación que es, sin lugar a dudas una forma efectiva de introducir a los estudiantes a la investigación matemática

BIBLIOGRAFÍA

1 ARBOLEDA L C (1985) Sobre los Fundamentos de la Teoría de los Espacios Compactos Colombia

2 BUSHAW D (1970) Fundamentos de Topología General Editorial Limusa-Wiley S A México

3 FRÉCHET M (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel París

4 FRÉCHET, M (1928) Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale París

5 GUTIÉRREZ, J J (1996) Espacios Topológicos T_1 Monografía Panamá

6 HEWIT, E y STROMBERG, K (1969) Real and Abstract Analysis Springer-Verlag Berlin-Hidelberg U S A

7 HILDEBRAND T H (1926) The Borel Theorem and its Generalizations Bulletin of the American Mathematical Society, Vol 32

8 HINRICHSEN, D y FERNÁNDEZ, J (1977) Topología General Editorial Pueblo y Educación La Habana

9 HORVÁTH, J (1969) Introducción a la Topología General The Pan American Union Washington D C

10 IRIBARREN, I (1973) Topología de Espacios Métricos Editorial Limusa S A México, D F

11 KELLEY, J L (1950) The Tychonoff Product Theorem Implies the Axiom of Choice Fundamenta Matemática Vol 37

12 KELLEY, J L (1975) Topología General Editorial Universidad de Buenos Aires Argentina

13 KURATOWSKI, K (1966) Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología Editorial Vincens-Vives España

14. MOORE, T. (1964). <u>Elementary General Topology</u>. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. N.J., U.S.A.

15. RÍBNIKOV, K. (1987). <u>Historia de las Matemáticas</u>. Traducido del ruso por Concepción Valdés Castro. Editorial MIR.

16. RUDIN, W. (1980). <u>Principios de Análisis Matemático</u>. McGraw-Hill Book. México.

17. RUDIN, W. (1966). <u>Análisis Funcional</u>. McGraw-Hill Book. México.

18. URYSOHN, P.S. (1925). <u>Mémorie sur les multiplicités cantoriennes</u>. Fund. Mat.

19. WHITE, A.J. (1973). <u>Introducción al Análisis Real</u>. Ediciones de Promoción Cultural, S.A. Barcelona.